

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXVI.

I. Theorie der Newton'schen Farbenringe im durchgehenden Lichte; von Ernst Gumlich.

(Hierzu Taf. IV Fig. 1—6.)

Von den Herren Sohncke und Wangerin¹⁾ wurden in den letzten Jahren mehrere Untersuchungen über die Newton'schen Farbenringe veröffentlicht, worin von Hrn. Wangerin auf theoretischem, von Hrn. Sohncke auf experimentellem Wege durch äusserst genaue Messungen nachgewiesen wurde, dass die bisher gebräuchliche Ansicht von der Gestalt und Lage dieser Ringe im reflectirten Lichte eine unrichtige war, dass diese Ringe im allgemeinen nicht Kreise sind, die auf der unteren Fläche der Glasplatte zu Stande kommen und sich concentrisch um den Berührungspunkt gruppiren, sondern vielmehr Curven doppelter Krümmung, die sämmtlich durch elliptische Cylinder, deren Leitlinie parallel ist der Axe des beobachtenden Instrumentes — Mikroskopes oder Fernrohres — herausgeschnitten werden aus einer geradlinigen Fläche dritter Ordnung, der sogenannten Interferenzfläche.

Auf die gütige Anregung des Hrn. Sohncke hin habe ich es versucht, die Untersuchung der analogen Erscheinung im durchgehenden Lichte durchzuführen — zunächst freilich nur auf theoretischem Wege, da mir die nöthigen Mittel zur experimentellen Prüfung der gefundenen Resultate leider zur Zeit nicht zu Gebote stehen — und habe mich dabei, soweit dies thunlich, der besseren Vergleichung halber möglichst genau an den Gang der Wangerin'schen Arbeit gehalten, auch die Bezeichnungen möglichst

1) Sohncke u. Wangerin, Wied. Ann. 12. p. 1. 1881 u. 20. p. 177. 1883.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXVI.

entsprechend gewählt. Im übrigen konnte ich mich hierbei auf die Betrachtung der Erscheinung beschränken, welche beim Durchgange des Lichtes durch eine planparallele Platte und eine sie mit der convexen Fläche berührende planconvexe Linse entsteht.

Hr. Wangerin machte bei seiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand die Annahme, dass von den sämtlichen, ins Mikroskop gelangenden Strahlenpaaren, die in einem Punkte des Systems zur Interferenz gekommen sind, hauptsächlich diejenigen beiden für das Zustandekommen heller und dunkler Punkte wesentlich und deshalb besonders in Rechnung zu ziehen seien, von denen je ein Strahl in der Richtung der Mikroskopaxe verläuft, während der Einfluss der anderen Strahlenpaare, welche mit den oben erwähnten beiden Hauptstrahlenpaaren sehr kleine Winkel bilden und sämtlich in einem sehr kleinen Kegelraume enthalten sind, in Bezug auf die Intensität erst in zweiter Linie berücksichtigt zu werden brauchen. Diese Theorie ergab Resultate, welche von den genauen experimentellen Untersuchungen des Hrn. Sohncke auf das vollkommenste bestätigt wurden. Trotzdem nun schon hierdurch die Berechtigung seiner Annahme als nachgewiesen gelten konnte, zeigte Herr Wangerin doch in einer zweiten Arbeit zur Beseitigung des gegen ihn erhobenen Vorwurfes, als sei seine Annahme eine willkürliche und unberechtigte, dass ein vollkommen strenges Verfahren, welches sofort die sämtlichen interferirenden und ins Auge gelangenden Strahlenpaare berücksichtigt, auf genau dieselben Formeln und Resultate führt.

Eben diesen Weg habe auch ich eingeschlagen — zunächst die ganze Ableitung nach der früheren, Wangerin'schen Hypothese durchgeführt und dann erst kurz mit Herbeiziehung der zweiten Wangerin'schen Ableitung auf dem vollkommen strengen Wege die Gültigkeit der gewonnenen Formeln nachgewiesen, wodurch ich gleichzeitig einen neuen Beweis für die Berechtigung der ursprünglichen Annahme Wangerin's geliefert zu haben glaube.

Treten wir nun letzterer selbst näher:

Gegeben ist uns nicht eine punktförmige, sondern eine ausgedehnte Lichtquelle, deren Strahlen etwa durch eine Linse nahezu parallel gemacht sein mögen — vollkommen parallel verlassen die Linse ja nur Strahlen, die genau vom Brennpunkte derselben ausgehen; wir sind aber doch berechtigt, vorauszusetzen, dass die gesammten Strahlen oder, was dasselbe ist, die zu diesen gehörigen Wellenebenen nur sehr geringe Winkel miteinander bilden — ihre Anzahl ist natürlich unendlich gross.

Fassen wir nun irgend einen Punkt F ins Auge (Fig. 1), der entweder oberhalb oder unterhalb der Ebene $W-W$ liegen kann, so werden durch diesen im allgemeinen sehr viele Strahlen gehen — entweder direct oder doch rückwärts verlängert —, in letzterem Falle ist der betrachtete Punkt ein virtueller Schnittpunkt.

Halten wir zunächst eine beliebige Wellenebene fest, deren untereinander parallele Strahlen also aus einem und demselben Punkte der Lichtquelle stammen, mithin ursprünglich gleiche Phase besitzen, so wird ein Strahl derselben nach directem Durchgange durch das System F treffen ($L-A'-B'-C'-G'-H'$), ein anderer ($L-A-B-C-B_1-C_1-G-H$) wird einmal, ein zweiter zweimal, ein k mal an der Oberfläche der Linse reflectirt werden, ehe er ebenfalls durch den Punkt F geht. Hier werden diese sämtlichen Strahlen interferiren, also, für sich betrachtet, Licht oder Dunkelheit erzeugen, und zwar werden wir die durch die mehrfach reflectirten Strahlen erzeugten Interferenzerscheinungen auf diejenigen zurückführen können, welche durch den direct hindurchgegangenen und den einmal an der Linse reflectirten Strahl hervorgerufen werden. Wir betrachten also zunächst nur diese beiden und denken uns die Axe des Beobachtungsinstrumentes in die Richtung dieses direct hindurchgegangenen Strahles gebracht. Gehen wir nun zu irgend einer anderen der vorhin erwähnten Wellenebenen über, so wird keine derselben Strahlen aussenden, welche, direct hindurchgegangen, genau in der Richtung der Mikroskopaxe verlaufen und so gleichzeitig den Punkt F treffen, wohl aber wird ein Strahl nach einer einmaligen

Reflexion diese Richtung erhalten, ein zweiter nach einer zweifachen etc.; — zu jedem dieser Strahlen, die untereinander wieder verschiedenen Wellenebenen angehören, wird ein aus der betreffenden Wellenebene stammender Strahl gehören, der nach directem Durchgange ebenfalls durch F geht und dort mit seinem Axenstrahle interferirt: Wiederum beschränken wir uns hier auf den einmal reflectirten und den dazugehörigen, direct durchgegangenen, und haben auf diese Weise zwei Strahlenpaare gewonnen, von denen jedes, für sich genommen, in F zur Interferenz gelangt, die aber, da sie aus verschiedenen Wellen stammen, nicht untereinander interferiren, und von denen ferner je ein Strahl in der Richtung der Mikroskopaxe verläuft, die beiden anderen aber mit dieser zwei verschiedene, kleine Winkel bilden. Diese beiden Paare, die Hauptpaare, sind gerade wegen ihres Zusammenfallens mit der Richtung der Mikroskopaxe die wesentlichsten des ganzen Systems, um welche sich die übrigen, ebenfalls in F interferirenden Strahlenpaare im Inneren eines kleinen Kegels symmetrisch gruppiren werden. Jedes dieser beiden Hauptpaare kann nun, je nach der Lage des Punktes F , dort entweder vollkommene oder unvollkommene Helligkeit oder Dunkelheit hervorbringen, und zwar jedes der Hauptpaare unabhängig vom anderen und ohne Störung durch das andere. Nun wird es aber sicher solche Punkte F geben, wo die Interferenzerscheinungen beider Paare gleichzeitig Helligkeit oder Dunkelheit ergeben, das werden dann die hellsten und dunkelsten Punkte überhaupt sein, und sucht man deren Gesammtheit auf, so muss man auf die hellen und dunklen ringförmigen Gebilde kommen, die unter dem Namen der Newton'schen Ringe bekannt sind.

Bei der Untersuchung legen wir zunächst ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, dessen Anfangspunkt O (Fig. 1) der Berührungspunkt von Platte und Linse sei, dessen ΞH -Ebene in der unteren Ebene der Glasplatte liege, dessen positive Ξ -Axe nach der Lichtquelle hin, und dessen positive Z -Axe von O nach oben gerichtet sein möge.

Nennen wir die Richtungscosinus einer von O aus auf die Wellenebene eines einfallenden Bündels paralleler Lichtstrahlen gefällten Normalen: $+\alpha, +\beta, +\gamma$, so erhalten wir für die Richtungscosinus der einzelnen Strecken des einmal reflectirten und des durchgehenden Strahles.

$$(1) \begin{cases} LA : -\alpha, -\beta, -\gamma \\ AB : -\alpha_1, -\beta_1, -\gamma_1 \\ BC : -\alpha, -\beta, -\gamma \\ CB_1 : -\alpha_2, -\beta_2, +\gamma_2 \\ B_1C_1 : -\alpha_3, -\beta_3, -\gamma_3 \\ C_1G : -\alpha_4, -\beta_4, -\gamma_4 \\ GH : -\alpha_5, -\beta_5, -\gamma_5 \end{cases} \quad \begin{cases} LA' : -\alpha, -\beta, -\gamma \\ A'B' : -\alpha'_1, -\beta'_1, -\gamma'_1 \\ B'C' : -\alpha, -\beta, -\gamma \\ C'G' : -\alpha'_4, -\beta'_4, -\gamma'_4 \\ G'H' : -\alpha'_5, -\beta'_5, -\gamma'_5 \end{cases}$$

Aus dem Brechungsgesetze folgt sofort, dass: $\alpha'_1 = \alpha_1$; $\beta'_1 = \beta_1$; $\gamma'_1 = \gamma_1$ und:

$$(2) \quad \alpha_1 = \frac{1}{n} \alpha; \quad \beta_1 = \frac{1}{n} \beta, \quad \gamma_1 = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}.$$

Nennen wir den Winkel, den der Krümmungsradius der Linse, vom Mittelpunkte nach C gezogen oder die in C nach aussen errichtete Normale mit der positiven Z -Axe einschliesst, $=\varphi$, denjenigen, den die Projection dieser Normalen auf die ΞH -Ebene mit der positiven Ξ -Axe bildet, $=\psi$, dann sind die drei Richtungscosinus dieser Normalen in C gegeben durch:

$$(3_a) \quad \sin \varphi \cos \psi; \quad \sin \varphi \sin \psi; \quad \cos \varphi$$

und nennen wir die entsprechenden Grössen für C_1 und C' , resp. φ_1, ψ_1 ; φ', ψ' , so haben wir für die Richtungscosinus der Normalen in C_1 und C' :

$$(3_b) \quad \sin \varphi_1 \cos \psi_1; \quad \sin \varphi_1 \sin \psi_1; \quad \cos \varphi_1,$$

$$(3_c) \quad \sin \varphi' \cos \psi'; \quad \sin \varphi' \sin \psi'; \quad \cos \varphi'.$$

Wir haben $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ auszudrücken durch $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi$; zu diesem Zwecke denken wir uns um den Punkt C eine Kugel mit dem Radius 1 construirt (Fig. 2); die Oberfläche derselben schneide den einfallenden Strahl in B , den reflectirten in B_1 , die in C errichtete Normale in P , die zur Ξ -Axe parallele Gerade in L . Dann ist nach dem Reflexionsgesetze:

$$\cos BCP = \cos PCB_1 = \alpha \sin \varphi \cos \psi + \beta \sin \varphi \sin \psi + \gamma \cos \varphi$$

Diese Grösse nennen wir: U .

Dann ergibt sich nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos LCB_1 = -\alpha_3 = 2U \sin \varphi \cos \psi - \alpha$$

und entsprechend für die beiden anderen Richtungscosinus, oder:

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha_3 = \alpha - 2U \sin \varphi \cos \psi \\ \beta_3 = \beta - 2U \sin \varphi \sin \psi \\ \gamma_3 = -\gamma + 2U \cos \varphi. \end{cases}$$

Weiter ist nach den Reflexionsgesetzen:

$$\alpha_3 = \alpha_2; \quad \beta_3 = \beta_2; \quad \gamma_3 = \gamma_2.$$

Um $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ auf $\alpha, \beta, \gamma; \varphi, \psi; \varphi_1, \psi_1$ zurückzuführen, denken wir uns wieder um C_1 eine Kugelfläche construiert mit dem Radius 1 (Fig. 3), welche den einfallenden Strahl in B_1 , den gebrochenen in G , das in C_1 nach aussen errichtete Perpendikel mit den Richtungscosinus: $\sin \varphi_1 \cos \psi_1; \sin \varphi_1 \sin \psi_1; \cos \varphi_1$ in P_1 schneiden möge, die der Z -Axe parallele Gerade aber in L . Nun ist nach den Formeln der analytischen Geometrie:

$$\cos (B_1 C_1 P_1) = \alpha_3 \sin \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta_3 \sin \varphi_1 \sin \psi_1 + \gamma_3 \cos \varphi_1 = U_1.$$

Betrachtet man ferner, dass nach dem Brechungsgesetze:

$$\sin (G_1 C_1 P_1) = \frac{1}{n} \sqrt{1 - U_1^2},$$

und dass $\cos (G_1 C_1 L) = \alpha_4$, so findet sich nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie:

$$\alpha_4 = \frac{1}{n} \left\{ \sin \varphi_1 \cos \psi_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) + \alpha_3 \right\} \quad \text{oder:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha_4 = \frac{1}{n} \left\{ \sin \varphi_1 \cos \psi_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) - 2U \sin \varphi \cos \psi + \alpha \right\}, \\ \beta_4 = \frac{1}{n} \left\{ \sin \varphi_1 \cos \psi_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) - 2U \sin \varphi \sin \psi + \beta \right\}, \\ \gamma_4 = \frac{1}{n} \left\{ \cos \varphi_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) + 2U \cos \varphi - \gamma \right\}, \end{cases}$$

$$\text{endlich: } \alpha_5 = n\alpha_4; \quad \beta_5 = n\beta_4; \quad \gamma_5 = \sqrt{1 - n^2 + n^2 \gamma_4^2}.$$

Die Richtungscosinus von $C'G'$: α', β', γ' finden wir, ausgedrückt durch $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi$ direct aus den Formeln (5),

wenn wir darin für $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \varphi_1, \psi_1$ setzen resp.: $\alpha, \beta, \gamma, \varphi', \psi'$,
wodurch dann von selbst die Grösse:

$$U_1 = (\alpha_3 \sin \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta_3 \sin \varphi_1 \sin \psi_1 + \gamma_3 \cos \varphi_1) \\ = \{(\alpha - 2U \sin \varphi \cos \psi) \sin \varphi_1 \cos \psi_1 \\ + (\beta - 2U \sin \varphi \sin \psi) \sin \varphi_1 \sin \psi_1 + (2U \cos \varphi - \gamma) \cos \varphi_1\}$$

übergeht in:

$$U' = (\alpha \sin \varphi' \cos \psi' + \beta \sin \varphi' \sin \psi' + \gamma \cos \varphi').$$

Es wird demnach:

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha'_4 = \frac{1}{n} \left\{ \sin \varphi' \cos \psi' (\sqrt{n^2 - 1 + U'^2} - U') + \alpha \right\}, \\ \beta'_4 = \frac{1}{n} \left\{ \sin \varphi' \sin \psi' (\sqrt{n^2 - 1 + U'^2} - U') + \beta \right\}, \\ \gamma'_4 = \frac{1}{n} \left\{ \cos \varphi' (\sqrt{n^2 - 1 + U'^2} - U') + \gamma \right\}. \end{cases}$$

Endlich liefert wieder das Brechungsgesetz:

$$\alpha'_5 = n\alpha'_4; \quad \beta'_5 = n\beta'_4; \quad \gamma'_5 = \sqrt{1 - n^2 + n^2\gamma'^2_4}.$$

Es sei der Ort der Interferenz F (Fig. 1) bestimmt durch die Coordinaten Ξ, H, Z , die Punkte C, C_1 und C' durch resp.: $\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi', \eta', \zeta'$.

Dann haben wir zunächst die Grössen: $\varphi, \psi; \varphi_1, \psi_1; \varphi', \psi'$ auszudrücken durch die Grössen: $\Xi, H, Z, \alpha, \beta, \gamma$. Es ist aber:

$$(7) \quad \begin{cases} \xi = r \sin \varphi \cos \psi; \quad \eta = r \sin \varphi \sin \psi; \quad \zeta = -r + r \cos \varphi = -2r \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \\ \xi_1 = r \sin \varphi_1 \cos \psi_1; \quad \eta_1 = r \sin \varphi_1 \sin \psi_1; \quad \zeta_1 = -2r \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}, \\ \xi' = r \sin \varphi' \cos \psi'; \quad \eta' = r \sin \varphi' \sin \psi'; \quad \zeta' = -2r \sin^2 \frac{\varphi'}{2}. \end{cases}$$

Ferner erhalten wir für:

$$(8) \quad CB_1 = -\frac{\xi}{\gamma_2}; \quad B_1 C_1 = -\frac{\xi_1}{\gamma_3}; \quad C_1 G = \frac{d + \xi_1}{\gamma_4}; \quad FG' = \frac{d + Z}{\gamma_5},$$

wenn wir mit d die Dicke der Glaslinse — natürlich an ihrer dicksten Stelle, dem Berührungspunkt O bezeichnen, während d die Dicke der Glasplatte bezeichnen soll. Berechnen wir mit Hülfe dieser Werthe die Grössen ξ, η, ζ und setzen die so gefundenen Werthe dann gleich den Grössen (7), so werden wir die gesuchte Relation zwischen φ, ψ und $\Xi, H, Z, \alpha, \beta, \gamma$ finden. Da jedoch in der ent-

stehenden Formel nicht nur φ, ψ , sondern auch φ_1, ψ_1 vorkommen wird, so müssen wir zuvor noch das letztere auf das erstere zurückzuführen suchen. Es gilt aber wegen der Gleichungen (7) und (8):

$$(\xi - \xi_1) = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \cdot 2r \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \cdot 2r \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \quad \text{oder:}$$

$$r(\sin \varphi \cos \psi - \sin \varphi_1 \cos \psi_1) = 2r \cdot \frac{\alpha_2}{f^2} \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \right),$$

endlich:

$$(9) \quad \begin{cases} \sin \varphi_1 \cos \psi_1 = \sin \varphi \cos \psi - 2 \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \right), \\ \sin \varphi_1 \sin \psi_1 = \sin \varphi \sin \psi - 2 \frac{\beta_2}{\gamma_2} \left(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \right), \\ \cos \varphi_1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}. \end{cases}$$

Nun sind $\sin \varphi, \sin \varphi_1$ und $\sin \varphi'$ nur sehr kleine Grössen, — $\sin \varphi = \sqrt{(\xi^2 + \eta^2)}/r$, wenn wir mit r den Krümmungsradius der Linse bezeichnen, und dieser muss ja, soll die Erscheinung überhaupt zu Stande kommen, die Grösse der Ringdurchmesser gegenüber sehr bedeutend sein. Fassen wir demnach die Grössen φ auf als unendlich klein von der ersten Ordnung, so sagen uns die Gleichungen (9), dass sich $\sin \varphi_1 \cos \psi_1$ und $\sin \varphi_1 \sin \psi_1$ von $\sin \varphi \cos \psi, \sin \varphi \sin \psi$ unterscheiden durch Grössen zweiter Ordnung.

Weiter ergibt sich mit Hülfe der Werthe (8):

$$(10) \quad \begin{cases} \xi = \tilde{\xi} - \frac{\alpha_2}{\gamma_2} (\alpha' + Z) + \frac{\alpha_2}{\gamma_2} (\alpha' + \xi_1) - \frac{\alpha_2}{\gamma_2} (\xi_1 + \xi), \\ \eta = H - \frac{\beta_2}{\gamma_2} (\alpha' + Z) + \frac{\beta_2}{\gamma_2} (\alpha' + \xi_1) - \frac{\beta_2}{\gamma_2} (\xi_1 + \xi). \end{cases}$$

Hierin sind die Werthe von $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ etc., die wir in den Gleichungen (4), (5) etc. fanden, einzusetzen und sämtliche Grössen nach Potenzen von φ zu entwickeln, was wegen der Kleinheit des Winkels φ sehr rasch zum Ziele führen wird; es wird genügen, wenn wir noch die Glieder zweiter Ordnung beibehalten, und zwar dürfen wir, da auch die Dicke der Glaslinse gegen deren Krümmungsradius sehr klein ist und weiter die Ringe immer in der Nähe der unteren Fläche der Glaslinse zum Vorschein kommen, also auch Z nur sehr

kleine Werthe haben wird, sowohl d/r als auch $(d+Z)/r$ als von der Ordnung der Grösse q auffassen. Hierdurch geht unser obiger Ausdruck für ξ über in:

$$\xi = \Xi - \frac{\sin q_1 \cos \psi_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) - 2U \sin q \cos \psi + \alpha}{\sqrt{(1 - n^2 + [\cos q_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) + 2U \cos q - \gamma]^2)}} (d' + Z) \\ + \frac{\sin q_1 \cos \psi_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) - 2U \sin q \cos \psi + \alpha}{\cos q_1 (\sqrt{n^2 - 1 + U_1^2} - U_1) + 2U \cos q - \gamma} (d' + \zeta_1) \\ - \frac{(\alpha - 2U \sin q \cos \psi)}{2U \cos q - \gamma} (\zeta + \zeta_1).$$

Den entsprechenden Werth für η erhalten wir hieraus, wenn wir Ξ , α , $\sin q_1 \cos \psi_1$, $\sin q \cos \psi$ vertauschen mit resp.: H , β , $\sin q_1 \sin \psi_1$, $\sin q \sin \psi$. Die Grössen U und U_1 sind hierbei die früher bereits angegebenen Ausdrücke (cf. 5). Unter Berücksichtigung der Werthe für $\sin q_1 \cos \psi_1$ etc. (cf. 9) und des Umstandes, dass wir wegen Beschränkung des gesuchten Resultates für $\sin q$ direct den Winkel q selbst setzen dürfen, geht obige Gleichung über in:

$$r \cdot q \cos \psi = \Xi - \frac{1}{\gamma} \left[q \cos \psi (\sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2} - 3\gamma) \right. \\ + \frac{\alpha}{\gamma^2} (\alpha q \cos \psi + \beta q \sin \psi) (\sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2} - 3\gamma) + \alpha \left. \right] (d' + Z) \\ + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}} \left[q \cos \psi (\sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2} - 3\gamma) \right. \\ + \frac{\alpha}{(n^2 - 1 + \gamma^2)} (\alpha q \cos \psi + \beta q \sin \psi) (\sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2} - 3\gamma) + \alpha \left. \right] \left(d' - \frac{r q^2}{2} \right) \\ + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot r q^2,$$

oder, wenn wir wieder nach den Anfangsformeln setzen: $\sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2} = n\gamma_1$:

$$r \cdot q \cos \psi = \Xi - \frac{\alpha}{\gamma} \left[d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) + Z \right] + q \cos \psi \left(3 - \frac{n\gamma_1}{\gamma} \right) \left[d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) + Z \right] \\ + \left(\frac{\alpha}{\gamma} q \cos \psi + \frac{\beta}{\gamma} q \sin \psi \right) \frac{\alpha}{\gamma} \left(3 - \frac{n\gamma_1}{\gamma} \right) \left[d' \left(1 - \frac{\gamma^3}{n^3 \gamma_1^3} \right) + Z \right] \\ + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\gamma} r q^2 \left(2 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right).$$

Wir führen jetzt, analog der Bezeichnung bei Wangerin, ein die Grössen:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{\Xi - \frac{\alpha}{\gamma} \left[d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) + Z \right]}{r}; \quad v_1 = \frac{H - \frac{\beta}{\gamma} \left[d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) + Z \right]}{r}; \\ \delta_1 &= d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right), \quad \delta_2 = d' \left(1 - \frac{\gamma^3}{n^3\gamma_1^3} \right), \\ \varepsilon_1 &= \left(1 - \frac{n\gamma_1}{\gamma} \right), \quad \varepsilon_2 = \left(2 - \frac{n\gamma_1}{\gamma} \right) \dots \text{allgem. } \varepsilon_h = \left(h - \frac{n\gamma_1}{\gamma} \right). \end{aligned} \right.$$

Es bildet der Werth u_1 eine erste Annäherungsformel für $q \cos \psi$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir die gesuchten Werthe genau bis auf Grössen zweiter Ordnung:

$$(12) \left\{ \begin{aligned} q \cos \psi &= \frac{u_1}{r} + \varepsilon_3 \frac{u_1}{r} \left(\frac{\delta_1 + Z}{r} \right) + \varepsilon_3 \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \left(\frac{\delta_2 + Z}{r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\gamma} \left(2 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \left(\frac{u_1^2 + v_1^2}{r^2} \right), \\ q \sin \psi &= \frac{v_1}{r} + \varepsilon_3 \frac{v_1}{r} \left(\frac{\delta_1 + Z}{r} \right) + \varepsilon_3 \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \left(\frac{\delta_2 + Z}{r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\gamma} \left(2 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \left(\frac{u_1^2 + v_1^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right.$$

Auf ganz analoge Weise haben wir weiter die Grössen $q' \cos \psi'$ aus $q' \sin \psi'$ zu berechnen und finden aus:

$$\begin{aligned} \xi' &= \Xi - \frac{\alpha_1'}{\gamma_1'} (d' + Z) + \frac{\alpha_1'}{\gamma_1'} (d' + \zeta'), \\ \eta' &= H - \frac{\beta_1'}{\gamma_1'} (d' + Z) + \frac{\beta_1'}{\gamma_1'} (d' + \zeta') \end{aligned}$$

durch Entwicklungen, ganz analog den oben durchgeführten:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} q' \cos \psi' &= \frac{u_1}{r} + \varepsilon_1 \frac{u_1}{r} \left(\frac{\delta_1 + Z}{r} \right) + \varepsilon_1 \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \left(\frac{\delta_2 + Z}{r} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{n\gamma_1} \left(\frac{u_1^2 + v_1^2}{r^2} \right), \\ q' \sin \psi' &= \frac{v_1}{r} + \varepsilon_1 \frac{v_1}{r} \left(\frac{\delta_1 + Z}{r} \right) + \varepsilon_1 \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \left(\frac{\delta_2 + Z}{r} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\beta}{n\gamma_1} \left(\frac{u_1^2 + v_1^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right.$$

Wir haben nach diesen vorbereitenden Formeln, wie schon früher angedeutet, die Wegdifferenz Δ_1 der beiden Strahlen, des einmal reflectirten und des direct durchgegangenen, und zwar beide bezogen auf die Luft, zu berechnen. Nennen wir LL' (cf. Fig. 1) irgend eine zu beiden Strahlen

senkrechte Ebene, also eine Wellenebene derselben, so hat nach seiner Ankunft in F der reflectirte Strahl zurückgelegt den Weg: $LA + BC + CB_1 + B_1C \pm GF$ in der Luft, $AB + C_1G$ im Glase; der direct durchgegangene den Weg $LA' + B'C \pm G'F$ in der Luft, $A'B + C'G$ im Glase, wobei das obere, resp. untere Zeichen gilt, je nachdem der Punkt F unterhalb, resp. oberhalb der Ebene $W-W$ liegt. Wollen wir die im Glase zurückgelegte Strecke ebenfalls auf die Luft beziehen, so müssen wir bedenken, dass ein Strahl, während er eine gewisse Strecke im Glase durchläuft, mit derselben Anzahl von Schwingungen und in derselben Zeit das n -fache dieser Strecke in der Luft durch-eilen würde, wenn wir mit n den Brechungsexponenten des Glases in Bezug auf Luft bezeichnen. Wir erhalten also, da $A'B = AB$, als Wegdifferenz beider Strahlen, bezogen auf Luft:

$$A_1 = BC + CB_1 + B_1C_1 - B'C - (LA' - LA) \pm (GF - G'F) + n(C_1G - C'G).$$

Nun sind die absoluten Längen von:

$$BC = \frac{-\zeta}{\gamma}; \quad CB_1 = \frac{-\zeta}{\gamma_2}; \quad B_1C_1 = \frac{-\zeta_1}{\gamma_2}; \quad B'C = \frac{-\zeta'}{\gamma}.$$

Um ferner $(LA' - LA)$ zu berechnen, führen wir die Gleichung der betreffenden Wellenebene LL' ein durch $\alpha x + \beta y + \gamma z = l$, wobei l die Länge des vom Koordinatenanfangspunkt O aus auf diese Ebene gefällten Perpendikels bedeutet. Es habe weiter der Punkt A die Coordinaten ξ_2, η_2, ζ_2 , der Punkt A' die Coordinaten ξ_3, η_3, ζ_3 , die von diesen Punkten auf dieselbe Wellenebene gefällten Perpendikel seien resp. l_2, l_3 , dann erhalten wir:

$$l_2 = \alpha(\xi - \xi_2) + \beta(\eta - \eta_2) + \gamma(\zeta - \zeta_2) = l - (\alpha\xi_2 + \beta\eta_2 + \gamma\zeta_2), \\ l_3 = \alpha(\xi - \xi_3) + \beta(\eta - \eta_3) + \gamma(\zeta - \zeta_3) = l - (\alpha\xi_3 + \beta\eta_3 + \gamma\zeta_3).$$

Demnach wird:

$$(LA' - LA) = (l_3 - l_2) = \alpha(\xi_2 - \xi_3) + \beta(\eta_2 - \eta_3) + \gamma(\zeta_2 - \zeta_3).$$

Das letzte Glied aber fällt fort wegen $\zeta_2 = \zeta_3 = d$. Ferner ist:

$$C_1G = \frac{d + \zeta_1}{\gamma_4}; \quad C'G' = \frac{d + \zeta'}{\gamma_4}; \quad GF = \frac{d + Z}{\gamma_5}; \quad G'F = \frac{d + Z}{\gamma_5}.$$

Führen wir dies alles in Δ_1 ein, so erhalten wir:

$$\Delta_1 = -\left(\frac{\zeta}{\gamma} + \frac{\zeta + \zeta_1}{\gamma_2}\right) + \frac{\zeta'}{\gamma} + \alpha(\xi_3 - \xi_2) + \beta(\eta_3 - \eta_2) \\ - \frac{d' + Z}{\gamma_5} + \frac{d' + Z}{\gamma_5} + \frac{n(d' + \zeta_1)}{\gamma_4} - \frac{n(d' + \zeta')}{\gamma_4}.$$

Nun ist, wie sich aus der Figur ergibt:

$$\xi_3 = \xi' - \frac{\alpha}{\gamma} \zeta' + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} d; \quad \xi_2 = \xi - \frac{\alpha}{\gamma} \zeta + \frac{\alpha_1}{\gamma_1} d. \\ \eta_3 = \eta' - \frac{\beta}{\gamma} \zeta' + \frac{\beta_1}{\gamma_1} d; \quad \eta_2 = \eta - \frac{\beta}{\gamma} \zeta + \frac{\beta_1}{\gamma_1} d,$$

$$\alpha(\xi_3 - \xi_2) + \beta(\eta_3 - \eta_2) = \alpha(\xi' - \xi) + \beta(\eta' - \eta) + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma} (\zeta' - \zeta),$$

ferner:

$$\alpha(\xi' - \xi) = \alpha \left[\bar{z} - \frac{\alpha_5'}{\gamma_5} (d' + Z) + \frac{\alpha_4'}{\gamma_4} (d' + \zeta') - \bar{z} + \frac{\alpha_5'}{\gamma_5} (d' + Z) \right. \\ \left. - \frac{\alpha_4}{\gamma_4} (d' + \zeta_1) + \frac{\alpha_2}{\gamma_2} (\zeta' + \zeta_1) \right].$$

und ganz entsprechend der Werth für $\beta(\eta' - \eta)$.

Fassen wir dies alles in passender Weise zusammen, so kommen wir schliesslich zu der symmetrisch gebauten Formel:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 &= (d' + Z) \left[\frac{\alpha \alpha_5 + \beta \beta_5 - 1}{\gamma_5} - \frac{(\alpha \alpha_5' + \beta \beta_5' - 1)}{\gamma_5} \right] \\ &+ (d' + \zeta') \frac{[\alpha \alpha_4' + \beta \beta_4' - n]}{\gamma_4} - (d' + \zeta_1) \frac{[\alpha \alpha_4 + \beta \beta_4 - n]}{\gamma_4} \\ &+ (\zeta' + \zeta_1) \frac{(\alpha \alpha_2 + \beta \beta_2 - 1)}{\gamma_2} + \gamma (\zeta' - \zeta). \end{aligned} \right.$$

Dieser Ausdruck ist, um ihn auf die früher gebrauchten Grössen u_1 , v_1 zu bringen, nach Potenzen von q zu entwickeln. Es ergibt sich dabei, ganz analog der entsprechenden Entwicklung in der Wangerin'schen Abhandlung, dass sich die sämtlichen ersten Potenzen von q heben; wir werden daher nicht nur die zweiten, sondern auch die dritten Potenzen beibehalten müssen. Mit Anwendung der früher (cf. (9) und (13)) gefundenen Werthe für q_1 und q' , sowie der Abkürzungen (11) und Uebergehung der ziemlich umfangreichen Einzelberechnungen kommen wir schliesslich auf die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & -\gamma \left[2 \cdot \varepsilon_2 \left(\frac{\alpha}{\gamma} \varphi \cos \psi + \frac{\beta}{\gamma} \varphi \sin \psi \right)^2 (\delta_2 + Z) \right. \\ & \left. + 2 \varepsilon_2 \varphi^2 (\delta_1 + Z) + \varepsilon_1 (\zeta_1 - \zeta') + 2 \zeta \right] \end{aligned}$$

oder bei Einführung der Grössen u_1, v_1 :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 = & \frac{\gamma}{r} \left[(u_1^2 + v_1^2) + 2 \varepsilon_2 (u_1^2 + v_1^2) \frac{(\delta_1 + Z)}{r} \right. \\ & \left. + 2 \varepsilon_2 \left(\frac{\alpha}{\gamma} u_1 + \frac{\beta}{\gamma} v_1 \right)^2 \frac{(\delta_1 + Z)}{r} + \left(2 - \frac{\gamma}{n \gamma_1} \right) \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) (u_1^2 + v_1^2) \right]. \end{aligned} \right.$$

Diese Formel bildet für unsere Untersuchungen einen bequemen Ausgangspunkt zur Gewinnung weiterer Ausdrücke: Einmal müssen wir nämlich, um das so gewonnene Resultat zur Vergleichung mit der Wegdifferenz des zweiten Hauptpaares tauglich zu machen, Δ_1 ausdrücken durch $\alpha'_5, \beta'_5, \gamma'_5$ statt durch α, β, γ , wodurch natürlich auch die Grössen u_1, v_1 in andere, entsprechende Grössen übergehen werden, und dann noch durch $\alpha_5; \beta_5; \gamma_5$. Zum Zwecke dieses Ueberganges von α nach α'_5 haben wir genau so zu verfahren, wie im Anfange unserer Untersuchungen, nur dass wir hier, abweichend von dem früheren Wege, den Richtungscosinus mit dem höheren Index als gegeben und den mit dem niedrigeren als gesucht zu betrachten haben. Nennen wir:

$$U_4' = \alpha_4' \sin \varphi' \cos \psi' + \beta_4' \sin \varphi' \sin \psi' + \gamma_4' \cos \varphi',$$

dann ergibt sich mit Hülfe des Brechungsgesetzes und der schon früher benutzten Formeln aus der sphärischen Trigonometrie:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= n \alpha'; & \beta &= n \beta'; & \gamma &= \sqrt{1 - n^2 + n^2 \gamma'^2}; \\ \alpha &= n \left[\sin \varphi' \cos \psi' \left(\frac{1}{n} \sqrt{1 + n^2 (U_4'^2 - 1)} - U_4' \right) + \alpha_4' \right], \\ \beta &= n \left[\sin \varphi' \cos \psi' \left(\frac{1}{n} \sqrt{1 + n^2 (U_4'^2 - 1)} - U_4' \right) + \beta_4' \right], \\ \gamma &= n \left[\cos \varphi' \left(\frac{1}{n} \sqrt{1 + n^2 (U_4'^2 - 1)} - U_4' \right) + \gamma_4' \right]; \\ \alpha_4' &= \frac{1}{n} \alpha'_5; & \beta_4' &= \frac{1}{n} \beta'_5; & \gamma_4' &= \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_5'^2}. \end{aligned} \right.$$

Berechnen wir aus:

$$\xi' = \Xi - \frac{\alpha_5'}{\gamma_5'}(d' + Z) + \frac{\alpha_4'}{\gamma_4'}(d' + \zeta');$$

$$\eta' = H - \frac{\beta_5'}{\gamma_5'}(d' + Z) + \frac{\beta_4'}{\gamma_4'}(d' + \zeta')$$

wieder $\varphi' \cos \psi'$; $\varphi' \sin \psi'$, ausgedrückt durch α_5' , β_5' , γ_5' , so erhalten wir:

$$r \sin \varphi' \cos \psi' = \Xi - \frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} \left[d' \left(1 - \frac{\gamma_5'}{n\gamma_4'} \right) + Z \right] - 2r \frac{\alpha_5'}{n\gamma_4'} \sin^2 \frac{\varphi'}{2},$$

oder, setzen wir:

$$(17) \quad \begin{cases} d' \left(1 - \frac{\gamma_5'}{n\gamma_4'} \right) = \delta_1'; & d' \left(1 - \frac{\gamma_5'^3}{n_3\gamma_4'^3} \right) = \delta_2', \\ \left(1 - \frac{n\gamma_4'}{\gamma_5'} \right) = \varepsilon_1' \dots \dots \left(h - \frac{n\gamma_4'}{\gamma_5'} \right) = \varepsilon_h', \\ \Xi - \frac{\alpha_5'}{\gamma_5'}(\delta_1' + Z) = u'; & H - \frac{\beta_5'}{\gamma_5'}(\delta_1' + Z) = v', \end{cases}$$

so folgt:

$$(18) \quad \begin{cases} \varphi' \cos \psi' = \frac{u'}{r} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_5'}{n\gamma_4'} \cdot \frac{u'^2 + v'^2}{r^2}, \\ \varphi' \sin \psi' = \frac{v'}{r} - \frac{1}{2} \frac{\beta_5'}{n\gamma_4'} \cdot \frac{u'^2 + v'^2}{r^2}. \end{cases}$$

Hierbei sind natürlich u'/r , v'/r Grössen von der Ordnung u_1/r , v_1/r oder φ .

Wir können direct von den Grössen u_1 , v_1 übergehen zu u' , v' . Es war ja:

$$u_1 = \Xi - \frac{\alpha}{\gamma} \left[d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) + Z \right]; \quad v_1 = H - \frac{\beta}{\gamma} \left[d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) + Z \right].$$

Setzen wir hierin die Werthe von (16) und (18) ein und entwickeln wie früher, dann erhalten wir mit Beibehaltung von Grössen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} u_1 &= u' - \varphi' \cos \psi' \cdot \varepsilon_1' (\delta_1' + Z) - \varepsilon_1' \cdot \frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} \left(\frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} \varphi' \cos \psi' + \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} \varphi' \sin \psi' \right) (\delta_2' + Z) \\ v_1 &= v' - \varphi' \sin \psi' \cdot \varepsilon_1' (\delta_1' + Z) - \varepsilon_1' \cdot \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} \left(\frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} \varphi' \cos \psi' + \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} \varphi' \sin \psi' \right) (\delta_2' + Z) \\ \hline (u_1^2 + v_1^2) &= (u'^2 + v'^2) - 2\varepsilon_1' (u'^2 + v'^2) \frac{(\delta_1' + Z)}{r} - 2 \left(\frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} u' + \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} v' \right)^2 \varepsilon_1' \frac{(\delta_2' + Z)}{r} \end{aligned}$$

Diesen Werth haben wir in die Gleichung für A_1 (cf. 15) einzuführen; bei den sämtlichen Gliedern dritter Ordnung geht, da wir nur Grössen dritter Ordnung in Betracht ziehen

wollen, sofort $u_1, v_1, \varepsilon, \delta$ über in resp. $u', v', \varepsilon', \delta'$, und wir erhalten somit das Gesuchte: Δ ausgedrückt durch die Grössen $\Xi, H, Z, \alpha'_5, \beta'_5, \gamma'_5$ als:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 = & \frac{\gamma'_5}{r} \left[u'^2 + v'^2 + 2(u'^2 + v'^2) \frac{(\delta'_1 + Z)}{r} + 2 \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} u' + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} v' \right)^2 \frac{(\delta'_2 + Z)}{r} \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{n^2 - 1}{n \gamma'_4 \gamma'_5} \right) (u'^2 + v'^2) \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \frac{u'}{r} + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \frac{v'}{r} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Letztere Formel können wir auch direct aus (14) erhalten und uns auf diese Weise von der Richtigkeit der angewandten Umformungen überzeugen. Zu diesem Zwecke haben wir zunächst die Grössen $\varphi \cos \psi, \varphi \sin \psi$ durch $u', v', \alpha'_5, \beta'_5, \gamma'_5$ auszudrücken, und zwar folgt sofort aus den Formeln:

$$\varphi \cos \psi = \frac{u_1}{r} + \frac{u_1}{r} \cdot \varepsilon_3 \cdot \frac{(\delta_1 + Z)}{r} + \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right) \varepsilon_3 \cdot \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\gamma} \left(2 - \frac{\gamma}{n \gamma_1} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2},$$

$$\varphi \sin \psi = \frac{v_1}{r} + \frac{v_1}{r} \cdot \varepsilon_3 \cdot \frac{(\delta_1 + Z)}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right) \varepsilon_3 \cdot \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\gamma} \left(2 - \frac{\gamma}{n \gamma_1} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2},$$

und:

$$\varphi' \cos \psi' = \frac{u'}{r} - \frac{1}{2} \frac{\alpha'_5}{n \gamma'_4} \frac{(u'^2 + v'^2)}{r^2},$$

$$\varphi' \sin \psi' = \frac{v'}{r} - \frac{1}{2} \frac{\beta'_5}{n \gamma'_4} \frac{(u'^2 + v'^2)}{r^2}, \quad \text{endlich:}$$

$$u_1 = u' - \varphi' \cos \psi' \cdot \varepsilon_1' (\delta_1' + Z) - \frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \varphi' \cos \psi' + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \varphi' \sin \psi' \right) \varepsilon_1' (\delta_2' + Z),$$

$$v_1 = v' - \varphi' \sin \psi' \cdot \varepsilon_1' (\delta_1' + Z) - \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \varphi' \cos \psi' + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \varphi' \sin \psi' \right) \varepsilon_1' (\delta_2' + Z),$$

dass:

$$\varphi \cos \psi = \frac{u'}{r} + 2 \frac{u'}{r} \frac{(\delta_1' + Z)}{r} + 2 \frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \frac{u'}{r} + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \frac{v'}{r} \right) \frac{(\delta_2' + Z)}{r} \\ + \frac{1}{2} \frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \left(2 - \frac{\gamma'_5}{n \gamma'_4} \right) \frac{(u'^2 + v'^2)}{r^2},$$

$$\varphi \sin \psi = \frac{v'}{r} + 2 \frac{v'}{r} \frac{(\delta_1' + Z)}{r} + 2 \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \left(\frac{\alpha'_5}{\gamma'_5} \frac{u'}{r} + \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \frac{v'}{r} \right) \frac{(\delta_2' + Z)}{r} \\ + \frac{1}{2} \frac{\beta'_5}{\gamma'_5} \left(2 - \frac{\gamma'_5}{n \gamma'_4} \right) \frac{(u'^2 + v'^2)}{r^2}.$$

Diese Formeln sind, abgesehen vom letzten Gliede, das einen Summand mehr enthält, den entsprechenden bei Hrn. Wangerin ganz analog gebaut. Führen wir mit ihnen die Entwicklung von (14) durch, so kommen wir genau wieder auf den Ausdruck (19) von Δ_1 .

Nachdem wir so in Δ_1 die Wegdifferenz des ersten Hauptpaares gefunden, haben wir auch die des zweiten zu ermitteln. Dies wird gebildet aus einem direct durchgegangenen und einem einmal an der Linse reflectirten Strahle, welch letzterer ebenfalls in der Richtung $\alpha'_5, \beta'_5, \gamma'_5$ die Linse verlassen soll.

Nennen wir für den Augenblick die Richtungscosinuse der einfallenden Strahlen des zweiten Hauptpaares $-a, -b, -c$, die des austretenden reflectirten Strahles $-a_5, -b_5, -c_5$, die des direct durchgegangenen $-a'_5, -b'_5, -c'_5$, so ist nach unserer Annahme $a_5 = \alpha'_5, b_5 = \beta'_5, c_5 = \gamma'_5$; wir haben also die Wegdifferenz dieses Strahlenpaares für a_5, b_5, c_5 zu berechnen und darin dann die Grössen α'_5 etc. einzuführen.

Um die Operation mit ganz neuen Grössen zu umgehen, denken wir uns die vorige Wegdifferenz Δ_1 berechnet für $\alpha_5, \beta_5, \gamma_5$, also für die Richtungscosinuse des reflectirt austretenden Strahles, sodann für α_5 etc. α_5 gesetzt und hierfür wieder α'_5 etc. Als Ausgangspunkt dient uns wieder Formel (15), wir haben in ihr nur von α, β, γ überzugehen auf $\alpha_5, \beta_5, \gamma_5$. Dazu gelangen wir abermals mit Berücksichtigung der Fig. 2 und 3 durch Anwendung desselben Verfahrens wie früher, mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie und finden successive:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \alpha_2 - 2(\alpha_2 q \cos \psi + \beta_2 q \sin \psi - \gamma_2 \cos q) q \cos \psi, \\ \beta &= \beta_2 - 2(\alpha_2 q \cos \psi + \beta_2 q \sin \psi - \gamma_2 \cos q) q \cos \psi, \\ \gamma &= -\gamma_2 - 2(\alpha_2 q \cos \psi + \beta_2 q \sin \psi - \gamma_2 \cos q) q \cos \psi. \end{aligned} \right. \\
 (20) \quad & \left\{ \begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_3; \quad \beta_2 = \beta_3; \quad \gamma_2 = \gamma_3. \\ \alpha_3 &= n \left[q_1 \cos \psi_1 \left(\frac{1}{n} \sqrt{1 - n^2(1 - U_4^2)} - U_4 \right) + \alpha_4 \right], \\ \beta_3 &= n \left[q_1 \sin \psi_1 \left(\frac{1}{n} \sqrt{1 - n^2(1 - U_4^2)} - U_4 \right) + \beta_4 \right], \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$(20) \begin{cases} \gamma_3 = n \left[\cos \varphi_1 \left(\frac{1}{n} \sqrt{1 - n^2(1 - U_4^2)} - U_4 \right) + \gamma_4 \right]; \\ \alpha_4 = \frac{1}{n} \alpha_5; \quad \beta_4 = \frac{1}{n} \beta_5; \quad \gamma_4 = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1 + \gamma_5^2}. \end{cases}$$

Hierbei ist: $U_4 = \alpha_4 \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta_4 \varphi_1 \sin \psi_1 + \gamma_4 \cos \varphi_1$.

Wir hatten früher gesetzt:

$$\varepsilon_1 = \left(1 - \frac{n\gamma_1}{\gamma} \right); \quad \delta_1 = d' \left(1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right).$$

Dementsprechend führen wir ein:

$$(21) \begin{cases} \vartheta_1 = d' \left(1 - \frac{\gamma_5}{n\gamma_4} \right); & \vartheta_2 = d' \left(1 - \frac{\gamma_5^3}{n^3\gamma_4^3} \right), \\ \eta_1 = \left(1 - \frac{n\gamma_4}{\gamma_5} \right) \dots & \eta_h = \left(h - \frac{n\gamma_4}{\gamma_5} \right), \\ u_2 = \Xi - \frac{\alpha_5}{\gamma_5} (\vartheta_1 + Z); & v_2 = H - \frac{\beta_5}{\gamma_5} (\vartheta_1 + Z), \end{cases}$$

wobei natürlich ϑ_1/r , u_2/r ganz von derselben Größenordnung sind, wie δ_1/r , u_1/r etc.

Wandeln wir unter dieser Voraussetzung den Ausdruck (15) für Δ_1 um und bedenken, dass wir wiederum nur Größen dritter Ordnung zu berücksichtigen haben, so ergibt sich zunächst:

$$u_1 = u_2 - \eta_3 \frac{u_2}{r} (\vartheta_1 + Z) - \eta_3 \cdot \frac{\alpha_5}{\gamma_5} \left(\frac{\alpha_5 u_2}{\gamma_5 r} + \frac{\beta_5 v_2}{\gamma_5 r} \right) (\vartheta_2 + Z),$$

$$v_1 = v_2 - \eta_3 \frac{v_2}{r} (\vartheta_1 + Z) - \eta_3 \cdot \frac{\beta_5}{\gamma_5} \left(\frac{\alpha_5 u_2}{\gamma_5 r} + \frac{\beta_5 v_2}{\gamma_5 r} \right) (\vartheta_2 + Z);$$

$$(u_1^2 + v_1^2) = u_2^2 + v_2^2 - 2\eta_3(u_2^2 + v_2^2) \frac{\vartheta_1 + Z}{r} - 2\eta_3 \left(\frac{\alpha_5}{\gamma_5} u_2 + \frac{\beta_5}{\gamma_5} v_2 \right) \frac{(\vartheta_2 + Z)}{r}.$$

Dies setzen wir ein und beachten noch $\gamma = \gamma_5 - \eta_3(\alpha_5(u_2/r) + \beta_5(v_2/r))$; gleichzeitig denken wir uns, wie vorher auseinandergesetzt, für α_5 , β_5 , γ_5 gesetzt α_5 , β_5 , γ_5 und hierfür werden α_5' , β_5' , γ_5' , wodurch von selbst ϑ_1 und ϑ_2 , u_2 , v_2 , Δ_1 übergeht in δ_1' , δ_2' , u' , v' , Δ_1' , und erhalten somit als Wegdifferenz des zweiten Hauptpaares:

$$(22) \begin{cases} \Delta_1 = \frac{\gamma_5'}{r} \left[u'^2 + v'^2 - 2(u'^2 + v'^2) \frac{(\delta_1' + Z)}{r} - 2 \left(\frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} u' + \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} v' \right) \frac{(\delta_2' + Z)}{r} \right. \\ \left. - (u'^2 + v'^2) \left(\frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} \frac{u'}{r} + \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} \frac{v'}{r} \right) + \frac{n^2 - 1}{n\gamma_4' n\gamma_5'} (u'^2 + v'^2) \left(\frac{\alpha_5'}{\gamma_5'} \frac{u'}{r} + \frac{\beta_5'}{\gamma_5'} \frac{v'}{r} \right) \right]. \end{cases}$$

Die Wegdifferenz des ersten Hauptpaares war gegeben durch die Formel (19):

Nun ist in unserem Falle die Wegdifferenz der beiden Strahlen, die zu einem der beiden Hauptpaare gehören, allein massgebend für die Phasenänderung der Lichtwellen und somit für das Zustandekommen der Interferenzerscheinungen im Punkte F .

Es erleidet nämlich der reflectirte Strahl gegenüber dem direct durchgegangenen durch die doppelte Reflexion an einem optisch dichterem Mittel, der Glaslinse und der Glasplatte, einen Verlust von je einer halben, zusammen also von einer ganzen Wellenlänge; die durch den reflectirten Strahl hervorgerufene Bewegung des betreffenden Aethertheilchens in F ist also genau dieselbe, als ob auf dem durchlaufenen Wege gar kein Verlust durch Reflexion stattgefunden hätte. Wir sehen also, dass uns die Interferenz des ersten Hauptpaares in F Dunkelheit, resp. Helligkeit liefern wird, wenn die Wegdifferenz beider Strahlen beträgt ein ungerades, resp. ein gerades Vielfache einer halben Wellenlänge, und genau dasselbe gilt für das zweite Hauptpaar.

Es wird nach der früher gemachten Annahme derjenige Punkt F die grösste Dunkelheit, resp. Helligkeit zeigen, in dem die Interferenz beider Hauptpaare gleichzeitig Dunkelheit, resp. Helligkeit hervorruft, demnach wird für die dunkeln Punkte die Relation gelten:

$$A_1 = A_1' = (2h - 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Dies ist aber nur dann möglich, wenn die im Vorzeichen voneinander abweichenden Glieder dritter Ordnung in A_1 und A_2 für sich gewonnen gleich Null sind. Wir erhalten damit die beiden Gleichungen:

$$(23) \begin{cases} \frac{\gamma_s'}{r} \left[(u'^2 + v'^2) + \frac{n^2 - 1}{n\gamma_s' \gamma_s} (u'^2 + v'^2) \left(\frac{\alpha_s'}{\gamma_s'} \frac{u'}{r} + \frac{\beta_s'}{\gamma_s'} \frac{v'}{r} \right) \right] = (2h - 1) \frac{\lambda}{2}, \\ 2(u'^2 + v'^2) (\delta_1' + Z) + 2 \left(\frac{\alpha_s'}{\gamma_s'} u' + \frac{\beta_s'}{\gamma_s'} v' \right)^2 (\delta_2' + Z) \\ \quad + (u'^2 + v'^2) \left(\frac{\alpha_s'}{\gamma_s'} u' + \frac{\beta_s'}{\gamma_s'} v' \right) = 0. \end{cases}$$

Vergleichen wir dies Resultat mit dem entsprechenden von Hrn. Wangerin:

$$\frac{I}{r}(u^2 + v^2) = h\lambda,$$

$$2(u^2 + v^2)(\delta_1 - \zeta) + 2\left(\frac{\alpha}{\gamma}u + \frac{\beta}{\gamma}v\right)^2(\delta_2 - \zeta) + \left(\frac{\alpha}{\gamma}u + \frac{\beta}{\gamma}v\right)(u^2 + v^2) = 0,$$

so finden wir, abgesehen von dem Vorzeichen von Z , die beiden letzten Gleichungen vollkommen übereinstimmend, die beiden ersten dagegen ziemlich verschieden: Einmal haben wir in unserem Falle rechts $(2h - 1)(\lambda/2)$, beim reflectirten Lichte dagegen $h\lambda$; es ist dies natürlich darauf zurückzuführen, dass in dem von Hrn. Wangerin betrachteten Falle der an der Linse reflectirte Strahl gegenüber dem nur an der Glasplatte reflectirten wegen der einmaligen Reflexion an einem optisch dichteren Mittel einen Verlust von einer halben Wellenlänge erlitten hat, sodass die Interferenz der Hauptpaare da dunkle Punkte liefern wird, wo der Wegunterschied der beiden Strahlen nicht ein ungerades, sondern ein gerades Vielfache einer halben Wellenlänge, also $2h(\lambda/2) = h\lambda$ beträgt, wenn wir unter h jede beliebige ganze Zahl von 1 an bezeichnen. Ferner enthält unsere Gleichung noch ein ganzes Glied auf der linken Seite, das bei der entsprechenden Wangerin'schen Formel fehlt. Nun ist aber, wegen des Factors $[(\alpha'_5/\gamma'_5)(u'/r) + (\beta'_5/\gamma'_5)(v'/r)]$ das hinzugekommene Glied gegenüber dem ersten, unendlich klein; daran ändert auch der erste Factor $(n^2 - 1)/n\gamma'_4\gamma'_5$ nichts, da dieser nur für den Fall unendlich gross werden kann, wenn $\gamma'_5 = 0$ oder der Einfallswinkel des Lichtes 90° betrüge, ein Fall, von dem wir füglich absehen können. Aus diesem Grunde dürfen wir überhaupt, da wir in dem $(2h - 1)(\lambda/2)$ einen Maassstab für die Grösse $(u'^2 + v'^2)/r$ gefunden haben, das im Vergleiche hiermit unendlich kleine zweite Glied vernachlässigen, wodurch unsere Gleichung nicht nur der bei Hrn. Wangerin ganz entsprechend, sondern auch zum Gebrauche vollkommen tauglich wird.

Ehe wir jedoch dieses Resultat weiter ausnützen, untersuchen wir noch, welchen Einfluss die von derselben Wellenebene stammenden, durch F gehenden, aber mehrmals in

der Luftlamelle reflectirten Strahlen auf das Resultat ausüben. Es werde (cf. Fig. 4) ein Strahl, dessen Einfallswinkel gegeben sei durch die Richtungscosinuse $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, nicht nur einmal, sondern k mal an der Linse reflectirt in den Punkten $C_1, C_2 \dots C_k$, an der Platte eben so oft in den Punkten $B_1, B_2 \dots B_k$, bei C_{k+1} trete er in die Linse. Die Punkte C seien bestimmt durch die sphärischen Coordinaten:

$$\varphi_1, \psi_1; \varphi_2, \psi_2; \dots \varphi_{k+1}, \psi_{k+1};$$

ihnen entsprechen dann die rechtwinkligen Coordinaten:

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2 \dots \xi_{k+1}, \eta_{k+1}, \zeta_{k+1}.$$

Der Strahl habe nach seiner ersten Reflexion an:

$$(24) \left\{ \begin{array}{lll} \text{der Kugelfläche die Richtungscosinuse} & -a_1, & -b_1; \quad +c_1, \\ \text{an der Glasplatte die} & \text{,,} & -a_1, \quad -b_1; \quad -c_1, \\ \text{nach der zweiten} & \dots & -a_2, \quad -b_2; \quad \pm c_2, \\ \text{nach der } k\text{ten} & \dots & -a_k, \quad -b_k; \quad \pm c_k, \\ \text{nach dem Eintritt in die Linse} & \dots & -a_{k+1}, \quad -b_{k+1}; \quad -c_{k+1}, \\ \text{nach dem Verlassen derselben} & \dots & -a_{k+2}, \quad -b_{k+2}; \quad -c_{k+2}. \end{array} \right.$$

Der zweite, direct durchgegangene Strahl ist derselbe wie früher, hat also auch dieselben Richtungscosinuse. Dann finden wir, ganz analog unserer früheren Entwicklung:

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} A_k = \alpha(\xi' - \xi_1) + \beta(\eta' - \eta_1) + \frac{1-\gamma^2}{\gamma}(\zeta_1 - \zeta') + \frac{1}{\gamma}(\zeta' - \zeta_1) \\ \quad - \left[\frac{1}{c_1}(\zeta_1 + \zeta_2) + \frac{1}{c_2}(\zeta_2 + \zeta_3) + \dots + \frac{1}{c_k}(\zeta_k + \zeta_{k+1}) \right] \\ \quad + n \left[\frac{d + \zeta_{k+1}}{c_{k+1}} - \frac{d + \zeta'}{\gamma_1} \right] + (d + Z) \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{c_{k+2}} \right). \end{array} \right.$$

Zunächst müssen wir wieder die Beziehungen zwischen den verschiedenen Grössen φ, ψ aufsuchen, und zwar finden wir diese in der successiven Anwendung der Gleichung (9); hierdurch erhalten wir, mit Berücksichtigung der Grössen zweiter Ordnung:

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 \cos \psi_2 = \varphi_1 \cos \psi_1 - \frac{\alpha}{\gamma} \varphi_1^2, \\ \varphi_2 \sin \psi_2 = \varphi_1 \sin \psi_1 - \frac{\beta}{\gamma} \varphi_1^2, \\ \varphi_3 \cos \psi_3 = \varphi_2 \cos \psi_2 - \frac{\alpha}{\gamma} \varphi_2^2 = \varphi_1 \cos \psi_1 - 2 \frac{\alpha}{\gamma} \varphi_1^2, \end{array} \right.$$

$$(26) \begin{cases} \varphi_3 \sin \psi_3 = \varphi_1 \sin \psi_1 - 2 \frac{\beta}{\gamma} \varphi_1^2 & \text{und allgemein:} \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_h \cos \psi_h = \varphi_1 \cos \psi_1 - (h-1) \frac{\alpha}{\gamma} \varphi_1^2, \\ \varphi_h \sin \psi_h = \varphi_1 \sin \psi_1 - (h-1) \frac{\beta}{\gamma} \varphi_1^2, \end{cases}$$

und ganz entsprechend:

$$(27) \begin{cases} \varphi_1 \cos \psi_1 = \varphi_2 \cos \psi_2 + \frac{\alpha}{\gamma} \varphi_2^2, \\ \varphi_1 \sin \psi_1 = \varphi_2 \sin \psi_2 + \frac{\beta}{\gamma} \varphi_2^2, \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_1 \cos \psi_1 = \varphi_h \cos \psi_h + (h-1) \frac{\alpha}{\gamma} \varphi_h^2, \\ \varphi_1 \sin \psi_1 = \varphi_h \sin \psi_h + (h-1) \frac{\beta}{\gamma} \varphi_h^2. \end{cases}$$

Weiter hängt a_h von a_{h-1} , b_h von b_{h-1} , c_h von c_{h-1} , ($h \leq k$) ebenso ab, wie früher a_2 , β_2 , γ_2 von resp. α , β , γ ; ferner a_{k+1} , b_{k+1} , c_{k+1} von a_k , b_k , c_k und wieder a_{k+2} , b_{k+2} , c_{k+2} von a_{k+1} , b_{k+1} , c_{k+1} , wie früher: a_4 , β_4 , γ_4 von a_3 , β_3 , γ_3 und a_5 , β_5 , γ_5 von a_4 , β_4 , γ_4 .

Wenden wir dies an, so finden wir für die verschiedenen a , b , c die Recursionsformeln:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha - 2\gamma \varphi_1 \cos \psi_1 - 2\varphi_1 \cos \psi_1 (\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) \\ b_1 &= \beta - 2\gamma \varphi_1 \sin \psi_1 - 2\varphi_1 \sin \psi_1 (\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) \\ c_1 &= \gamma + 2(\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) - 2\gamma \varphi_1^2, \\ a_2 &= a_1 - 2c_1 \varphi_2 \cos \psi_2 - 2\varphi_2 \cos \psi_2 (a_1 \varphi_2 \cos \psi_2 + b_1 \varphi_2 \sin \psi_2), \end{aligned}$$

oder durch Einsetzen der Werthe a_1 , φ , ψ und mit Berücksichtigung der Grössen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} a_2 &= \alpha - 2\gamma \varphi_1 \cos \psi_1 - 2^2 \cdot 2 \varphi_1 \cos \psi_1 (\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) + 2\alpha \varphi_1^2 \\ b_2 &= \beta - 2\gamma \varphi_1 \sin \psi_1 - 2^2 \cdot 2 \varphi_1 \sin \psi_1 (\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) + 2\beta \varphi_1^2 \\ c_2 &= \gamma + 2 \cdot 2 (\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) - 2^2 \cdot 2 \gamma \varphi_1^2 - 2 \frac{(1-\gamma^2)}{\gamma} \varphi_1^2 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

und allgemein:

$$(28) \begin{cases} a_h = \alpha - h \cdot 2\gamma \varphi_1 \cos \psi_1 - h^2 \cdot 2 \varphi_1 \cos \psi_1 (\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) + h(h-1) \alpha \varphi_1^2 \\ b_h = \beta - h \cdot 2\gamma \varphi_1 \sin \psi_1 - h^2 \cdot 2 \varphi_1 \sin \psi_1 (\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) + h(h-1) \beta \varphi_1^2 \\ c_h = \gamma + h \cdot 2 (\alpha \varphi_1 \cos \psi_1 + \beta \varphi_1 \sin \psi_1) - h^2 \cdot 2 \gamma \varphi_1^2 - h(h-1) \frac{1-\gamma^2}{\gamma} \varphi_1^2. \end{cases}$$

V
2
61
8
8
5

XUM

Ferner haben wir q und ψ auszudrücken durch unsere früher gebrauchten Grössen $u_1, v_1, \alpha, \beta, \gamma$.

Nun ist, wie früher abgeleitet:

$$\xi_{k+1} = r \cdot q_{k+1} \cos \psi_{k+1} = \xi - \frac{a_{k+2}}{c_{k+2}} (d' + Z) + \frac{a_{k+1}}{c_{k+1}} (d' - \frac{1}{2} r q_{k+1}^2)$$

oder:

$$\begin{aligned} & r q_{k+1} \cos \psi_{k+1} \\ = & \xi - \frac{q_{k+1} \cos \psi_{k+1} (V n^2 - 1 + U_{k+1}^2 - U_{k+1}) + a_k}{V 1 - n^2 + [\cos q_{k+1} (V n^2 - 1 + U_{k+1}^2 - U_{k+1}) + c_k]^2} (d' + Z) \\ & + \frac{q_{k+1} \cos \psi_{k+1} (V n^2 - 1 + U_{k+1}^2 - U_{k+1}) + a_k}{\cos q_{k+1} (V n^2 - 1 + U_{k+1}^2 - U_{k+1}) + c_k} (d' - \frac{1}{2} r q_{k+1}^2), \end{aligned}$$

wobei: $U_{k+1} = a_k q_{k+1} \cos \psi_{k+1} + b_k q_{k+1} \sin \psi_{k+1} + c_k \cos q_{k+1}$.

Führen wir in diese Formeln die Werthe (26) und (28) ein und entwickeln ganz wie früher, nach Potenzen q , so erhalten wir, mit Berücksichtigung der Grössen zweiter Ordnung und gleichzeitiger Anwendung der Werthe u_1, v_1 :

$$(29) \quad \begin{cases} q_{k+1} \cos \psi_{k+1} = \frac{u_1}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{u_1}{r} \frac{(\delta_1 + Z)}{r} \\ \quad + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \frac{(\delta_2 + Z)}{r} - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{n \gamma_1} \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}, \\ q_{k+1} \sin \psi_{k+1} = \frac{v_1}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{v_1}{r} \frac{(\delta_1 + Z)}{r} \\ \quad + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \frac{(\delta_2 + Z)}{r} - \frac{1}{2} \frac{\beta}{n \gamma_1} \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}. \end{cases}$$

Hierin ist, wie früher:

$$\varepsilon_{2k+1} = \left(2k + 1 - \frac{n \gamma_1}{\gamma} \right), \quad \delta_1 = d' \left(1 - \frac{\gamma}{n \gamma_1} \right), \quad \delta_2 = d' \left(1 - \frac{\gamma^2}{n^2 \gamma_1^2} \right)$$

etc. gesetzt. Wenden wir darauf die Gleichung (27) an, so erhalten wir:

$$(30) \quad \begin{cases} q_1 \cos \varphi_1 = \frac{u_1}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{u_1}{r} \frac{(\delta_1 + Z)}{r} + \varepsilon_{2k+1} \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ \quad + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\gamma} \left(2k - \frac{\gamma}{n \gamma_1} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}, \\ q_1 \sin \varphi_1 = \frac{v_1}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{v_1}{r} \frac{(\delta_1 + Z)}{r} + \varepsilon_{2k+1} \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{u_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ \quad + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\gamma} \left(2k - \frac{\gamma}{n \gamma_1} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2} \end{cases}$$

und endlich allgemein:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} q_h \cos \psi_h &= \frac{u_1}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{u_1}{r} \cdot \frac{(\delta_1 + Z)}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right) \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\gamma} \left(2k - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2} - (h-1) \frac{\alpha}{\gamma} \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}, \\ q_h \sin \psi_h &= \frac{v_1}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{v_1}{r} \cdot \frac{(\delta_1 + Z)}{r} + \varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right) \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\gamma} \left(2k - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2} - (h-1) \frac{\beta}{\gamma} \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}. \end{aligned} \right.$$

Durch Quadriren und Addiren ergeben sich hieraus die Werthe:

$$\begin{aligned} q_1^2 &= \frac{u_1^2 + v_1^2}{r^2} + 2\varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{(u_1^2 + v_1^2)(\delta_1 + Z)}{r^2} + 2\varepsilon_{2k+1} \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right)^2 \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ &\quad + \left(2k - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}, \\ q_h^2 &= \frac{u_1^2 + v_1^2}{r^2} + 2\varepsilon_{2k+1} \cdot \frac{(u_1^2 + v_1^2)(\delta_1 + Z)}{r^2} + 2\varepsilon_{2k+1} \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right)^2 \frac{(\delta_2 + Z)}{r} \\ &\quad + \left(2k - \frac{\gamma}{n\gamma_1} \right) \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2} - 2(h-1) \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2}. \end{aligned}$$

Setzen wir in den soeben gewonnenen Formeln für $q_1 \cos \psi_1$; $q_1 \sin \psi_1$; $q_1^2 : k$ einmal $= 1$ und dann $= 0$, so kommen wir, wie dies ja auch sein muss, genau auf die früher (cf. 12 und 13) berechneten Gleichungen für $q \cos \psi$, $q \sin \psi$; q^2 ; $q' \cos \psi'$, $q' \sin \psi'$, q'^2 .

Wir haben nun alle nöthigen Vorbereitungsformeln gewonnen, um den Werth Δ_k (cf. 25) in u_1 , v_1 ausdrücken zu können. Zunächst ergibt sich noch:

$$\begin{aligned} (\xi - \xi_1) &= \left[\Xi - \frac{\alpha_2'}{\gamma_2} (d' + Z) + \frac{\alpha_4'}{\gamma_4} (d' + \zeta') - \Xi + \frac{\alpha_{k+2}}{\gamma_{k+2}} (d' + Z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_{k+1}}{\gamma_{k+1}} (d' + \zeta_{k+1}) + \sum_{h=1}^{h=k} \frac{\alpha_h}{\gamma_h} (\zeta_h + \zeta_{h+1}) \right], \\ (\eta - \eta_1) &= \left[H - \frac{\beta_2'}{\gamma_2} (d' + Z) + \frac{\beta_4'}{\gamma_4} (d' + \zeta') - H + \frac{\beta_{k+2}}{\gamma_{k+2}} (d' + Z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_{k+1}}{\gamma_{k+1}} (d' + \zeta_{k+1}) + \sum_{h=1}^{h=k} \frac{\beta_h}{\gamma_h} (\zeta_h + \zeta_{h+1}) \right]. \end{aligned}$$

Fassen wir alles zusammen, so erhalten wir einen der Formel (14) vollkommen entsprechenden Ausdruck, der auch für $k = 1$ in den letzteren übergehen würde:

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_h &= (d' + Z) \left[\frac{\alpha a_{k+2} + \beta b_{k+2} - 1}{c_{k+2}} - \frac{\alpha a'_5 + \beta \beta'_5 - 1}{\gamma_5} \right] \\ &+ (d' + \zeta) \left[\frac{\alpha a'_4 + \beta \beta'_4 - 1}{\gamma_4} \right] - (d' + \zeta_{k+1}) \left[\frac{\alpha a_{k+1} + \beta b_{k+1} - 1}{c_{k+1}} \right] \\ &+ \gamma (\zeta' - \zeta_1) + \sum_{h=1}^{h=k} h \left(\frac{\alpha a_h + \beta b_h - 1}{c_h} \right) (\zeta_h + \zeta_{h+1}). \end{aligned} \right.$$

Hierin haben wir die kurz vorher abgeleiteten Reducionsformeln der Grössen a, b, c auf α, β, γ und der verschiedenen q und ψ auf q_1 und ψ_1 einzuführen. Dann gelangen wir für die einzelnen Summanden der Gleichung stets auf Ausdrücke, welche in die entsprechenden der bei der Auswerthung der Gl. (14) gefundenen übergehen, wenn wir in unseren jetzigen: $k = 1$ setzen, sodass wir darin eine gewisse Controle für die Rechnung sehen dürfen. Weiter ergibt sich, dass auch hier bei der Entwicklung nach q_1 die sämtlichen Grössen erster Ordnung wegfallen, wir haben also wieder Grössen dritter Ordnung zu berücksichtigen. Dabei reducirt sich der Ausdruck: $(\alpha a_h + \beta b_h - 1)/c_h$ auf $-\gamma$; ausserdem haben wir noch zu bedenken, dass nach den Formeln (30) die Ausdrücke q_h^2 das h überhaupt nur im letzten Gliede enthalten, sonst aber ganz unabhängig davon sind. Danach wird, da wir die Grösse $(\alpha a_h + \beta b_h - 1)/c_h = -\gamma$ als constant vor das Summenzeichen setzen können:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{h=k} h (q_h^2 + q_{h+1}^2) &= 2k \left[\frac{u_1^2 + v_1^2}{r^2} + 2 \cdot \epsilon_{2k+1} \frac{(u_1^2 + v_1^2) (\delta_1 + Z)}{r^2} \right] \\ &+ 2 \cdot \epsilon_{2k+1} \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right) \frac{(\delta_1 + Z)}{r} + \left(2k - \frac{\gamma}{\gamma_1} \right) \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2} \\ &- 2 \left(\frac{\alpha u_1}{\gamma r} + \frac{\beta v_1}{\gamma r} \right) \frac{(u_1^2 + v_1^2)}{r^2} \left[\sum_{h=1}^{h=k} (h-1) + \sum_{h=1}^{h=k} h \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Es ist aber: } \left[\sum_{h=1}^k (h-1) + \sum_{h=1}^k h \right] = k^2.$$

Führen wir endlich auch in den übrigen Summanden von Δ_k für die $\varphi_1 \cos \psi_1$ und $\varphi_1 \sin \psi_1$ etc. ihre Ausdrücke in u_1, v_1 ein, so ergibt sich schliesslich das Resultat:

$$\Delta_k = \frac{\gamma}{r} \cdot k \left\{ (u_1^2 + v_1^2) + 2 \cdot \epsilon_{k+1} (u_1^2 + v_1^2) \frac{(\delta_1 + Z)}{r} \right. \\ \left. + 2 \epsilon_{k+1} \left(\frac{\alpha}{\gamma} u_1 + \frac{\beta}{\gamma} v_1 \right)^2 \frac{(\delta_1 + Z)}{r} \right. \\ \left. + \left(k + 1 - \frac{\gamma}{n \gamma_1} \right) \left(\frac{\alpha}{\gamma} \frac{v_1}{r} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{v_1}{r} \right) (u_1^2 + v_1^2) \right\}$$

oder, wenn man mit Hülfe der früher gewonnenen Formeln (cf. 18 etc.) von den Grössen u_1, v_1 (α, β, γ) übergeht zu u', v' (α', β', γ'):

$$\Delta_k = k \cdot \frac{\gamma'}{r} \left\{ (u'^2 + v'^2) + 2k (u'^2 + v'^2) \frac{(\delta_1' + Z)}{r} \right. \\ \left. + 2k \left(\frac{\alpha'}{\gamma'} u' + \frac{\beta'}{\gamma'} v' \right)^2 \frac{(\delta_1' + Z)}{r} + \left(k + \frac{n^2 - 1}{n \gamma' \gamma'} \right) \left(\frac{\alpha'}{\gamma'} \frac{u'}{r} + \frac{\beta'}{\gamma'} \frac{v'}{r} \right) (u'^2 + v'^2) \right\} \\ = k \Delta_1 + k (k - 1) \cdot \frac{\gamma'}{r} \left\{ 2 (u'^2 + v'^2) \frac{(\delta_1' + Z)}{r} \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\alpha'}{\gamma'} u' + \frac{\beta'}{\gamma'} v' \right)^2 \frac{(\delta_1' + Z)}{r} + \left(\frac{\alpha'}{\gamma'} \frac{u'}{r} + \frac{\beta'}{\gamma'} \frac{v'}{r} \right) (u'^2 + v'^2) \right\}.$$

Dieser letzte Klammerausdruck ist aber wegen (23) = Null, wir erhalten demnach:

$$(32) \quad \left\{ \Delta_k = k \cdot \Delta_1 = k (2k - 1) \frac{\lambda}{2} \right.$$

Dieses Resultat: $\Delta_k = k \Delta_1$, stimmt, äusserlich betrachtet, mit dem von Wangerin für reflectirtes Licht gefundenen vollkommen überein, es wäre jedoch falsch, wollten wir mit ihm daraus den Schluss ziehen, dass, wie dort, die sämtlichen übrigen, mehrfach in der Luftlamelle reflectirten Strahlen an dem Resultate, das uns die beiden Hauptstrahlenpaare liefern, nichts mehr ändern können: Im reflectirten Lichte findet nämlich, wie schon früher erwähnt, in denjenigen Punkten durch Interferenzerscheinungen Dunkelheit statt, in denen die Wegdifferenz der interferirenden Strahlen ein beliebiges Vielfache einer ganzen Wellenlänge beträgt, — dieser Bedingung genügt aber auch $\Delta_k = k \Delta_1 = k \cdot h \cdot \lambda$, wo k und h beliebige, ganze Zahlen sind; es ist also der

Schluss jedenfalls berechtigt, dass es im reflectirten Lichte nahezu absolut dunkle Punkte gibt. (Uns sagt u.)

Anders dagegen beim durchgehenden Lichte. Uns sagt nämlich Gleichung (32), dass der gefundene Werth von Δ_k nur dann der Forderung absoluter Dunkelheit entsprechen würde, wenn k eine ungerade Zahl wäre; ist dagegen k eine gerade Zahl, so ist Δ_k gleich einem Vielfachen einer ganzen Wellenlänge, die Interferenz des mehrfach reflectirten mit dem direct durchgegangenen Strahle wird deshalb kein Minimum, sondern ein Maximum von Licht verursachen. Nun aber gehen neben dem gar nicht reflectirten Strahle durch den Punkt F im allgemeinen eine grosse Menge von Strahlen, die von derselben Wellenebene stammen, also untereinander interferiren, und von dem der eine einmal, der andere zweimal, ein k . k mal an der Linse reflectirt war. Fassen wir, wie bisher, den direct durchgegangenen und den einmal reflectirten Strahl zusammen und nehmen an, ihre Wegdifferenz sei $= (2h - 1) \cdot \lambda / 2$, so wird, was diese Hauptstrahlen betrifft, in dem betreffenden Punkte F Dunkelheit herrschen; — zwar, genau genommen, auch nicht vollkommen, denn der reflectirte Strahl hat durch eine doppelte Reflexion an Glasplatte und Linse eine nicht unbedeutende Schwächung seiner Intensität erfahren, es wird also die durch den direct hindurchgegangenen Strahl bewirkte Bewegung des Aethertheilchens in F durch den einmal reflectirten Strahl auch nicht vollkommen aufgehoben werden können. Nehmen wir dann die zwei- und dreimal an der Linse reflectirten Strahlen zusammen, so haben diese in F untereinander wieder eine Wegdifferenz von $(2h - 1) / 2$ Wellenlänge, sie würden also, für sich betrachtet, wieder Dunkelheit geben, die nur dadurch wieder unvollkommen ist, weil der eine der Strahlen gegenüber dem zweiten durch eine um 2 vermehrte Anzahl von Reflexionen einen Theil seiner Intensität eingebüsst hat, — und so können wir weiter verfahren, bis wir schliesslich bei höheren Werthen von k auf Strahlen kommen, deren Intensität durch die grosse Anzahl von Reflexionen so gering ist, dass wir sie überhaupt nicht mehr zu berücksichtigen brauchen. Wir werden also allgemein

auch trotz der Einwirkung der mehrfach reflectirten Strahlen da Dunkelheit haben, wo die beiden Hauptpaare allein sie hervorbringen würden, — aber eben nicht vollkommene. (Dieselbe Betrachtungsweise, die wir für die mehrfach reflectirten Strahlen des einen Hauptpaares angewendet, gilt natürlich auch für die des zweiten und führt zu demselben Resultate.)

Im Gegensatze hierzu haben wir ganz helle Stellen, denn diese finden sich überall da, wo $A_1 = h\lambda$, wobei h eine beliebig ganze Zahl sein kann, und dieser Bedingung genügt ja auch $A_k = k \cdot h\lambda$. Bei dem von Hrn. Wangerin untersuchten Falle des reflectirten Lichtes dagegen sind umgekehrt die hellen Stellen nicht vollkommen hell, denn er hat für das Zustandekommen der hellen Stellen dieselbe Bedingung, wie wir für das Zustandekommen der dunklen, es werden also dort die mehrfach reflectirten Strahlen etwas störend wirken.

Wir gehen nun weiter zur genauen Untersuchung der Lage der dunklen Punkte, wie dieselben durch die Interferenz der massgebenden Hauptpaare hervorgebracht werden.

Wir hatten in (23) die beiden Bedingungsbedingungen für das Zustandekommen der dunklen Punkte, resp. Ringe, gefunden und können diese zunächst noch dadurch etwas umformen, dass wir den bisher beliebig in der \mathcal{Z} - H -Ebene angenommenen Axen eine bestimmte Richtung geben, und zwar soll die \mathcal{Z} -Axe parallel sein der Projection der Mikroskopaxe ($\alpha'_s, \beta'_s, \gamma'_s$) auf die \mathcal{Z} - H -Ebene, und, wie bisher, ihr positiver Theil der Lichtquelle zugekehrt. Nennen wir dann den Winkel zwischen der Z -Axe und der Richtung der in der Mikroskopaxe verlaufenden Hauptstrahlen, die sich von der der einfallenden Strahlen nur um kleine Grössen von der Ordnung φ unterscheidet, $= \vartheta$, den dazu gehörigen Brechungswinkel in der Linse $= \vartheta_1$, so haben wir zu setzen:

$$\alpha'_s = \sin \vartheta; \quad \beta'_s = 0; \quad \gamma'_s = \cos \vartheta;$$

$$\gamma'_1 = \cos \vartheta_1 = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1 + \cos^2 \vartheta}.$$

Hierdurch gehen unsere obigen Formel über in:

$$(33_a) \quad \left\{ [\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta'_1 + Z)]^2 + H^2 = \frac{(2k-1)r \cdot \lambda}{2 \cos \vartheta} = a_1^2, \right.$$

$$(33_b) \quad \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{tg} \vartheta [\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta'_1 + Z)] + 2(\delta'_1 + Z) \\ & + 2(\delta'_2 + Z) \operatorname{tg}^3 \vartheta \frac{[\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta'_1 + Z)]^2}{[\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta'_1 + Z)]^2 + H^2} = 0, \end{aligned} \right.$$

$$\text{wobei: } \delta'_1 = d' \left(1 - \frac{\cos \vartheta}{n \cos \vartheta_1} \right); \quad \delta'_2 = d' \left(1 - \frac{\cos^2 \vartheta}{n^2 \cos^2 \vartheta_1} \right).$$

Vergleichen wir damit die entsprechenden von Hrn. Wangerin für reflectirtes Licht gefundenen Formeln:

$$[\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 - Z)]^2 + H^2 = \frac{hr\lambda}{\cos \vartheta} = a^2,$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \vartheta [\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 - Z)] + 2(\delta_1 - Z) \\ & + 2(\delta_2 - Z) \operatorname{tg}^2 \vartheta \frac{[\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 - Z)]^2}{[\bar{Z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 - Z)]^2 + H^2} = 0, \end{aligned}$$

so ergibt sich, dass unsere beiden Gleichungen — abgesehen von der verschiedenen Bedeutung der Grössen a und a_1 und der in den δ enthaltenen Grössen d und d' , von denen das erste, bei Hrn. Wangerin, die Dicke der Glasplatte, das zweite, bei uns, die Dicke der Linse bezeichnet, vollkommen ineinander übergehen, wenn wir die positive Z -Axe, statt senkrecht nach oben, senkrecht nach unten legen. Diese Veränderung gestattet uns dann, die von Hrn. Wangerin gefundenen Resultate unter Berücksichtigung der oben angedeuteten Abweichungen sofort auf unseren Fall zu übertragen.

Zuvor aber lassen sich die gefundenen Formeln noch in andere umwandeln, die zur Untersuchung der Interferenzfläche in mancher Beziehung noch mehr geeignet sind, als die Gleichungen (34). Wir erhalten dieselben, wenn wir von dem rechtwinkligen Coordinatensystem \bar{Z}, H, Z zu einem schiefwinkligen X, Y, Z übergehen, dessen Anfangspunkt in dem scheinbaren Berührungspunkte P_1 von Linse und Platte liegt (cf. Fig. 5), und der gegeben ist durch die Gleichungen:

$$\bar{Z}_0 = -d'(n^2 - 1) \operatorname{tg}^3 \vartheta_1; \quad Z_0 = d' \left(1 - \frac{\cos^2 \vartheta}{n^2 \cos^2 \vartheta_1} \right).$$

Hierbei mögen die X - und Y -Axe den bisherigen \bar{Z} - und H -Axen parallel sein, die Z -Axe dagegen die Richtung der

Mikroskopaxe haben, wodurch wir die Transformationsformeln erhalten:

$$\tilde{z} = \tilde{z}_0 + x - z \sin \vartheta; \quad H = y; \quad Z = Z_0 + z \cos \vartheta.$$

Damit aber werden unsere Formeln (34) zu:

$$(34) \begin{cases} x^2 + y^2 = a_1^2 \\ x(x^2 + y^2) \sin \vartheta - 2z(x^2 + y^2 \cos^2 \vartheta) + 2(\delta_1 - \delta_2)y^2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta = 0. \end{cases}$$

Auch diese Formeln stimmen mit den Wangerin'schen vollkommen überein, und sie sind es auch, auf welche wir kommen, wenn wir den vollkommen strengen, von Hrn. Wangerin in der 2. Abhandlung¹⁾ eingeschlagenen Weg betreten. Hierbei dürfen wir uns jedoch darauf beschränken, den Gang nur kurz zu skizziren, da es sich sofort ergibt, dass wir mit einigen geringen Aenderungen die ganze Wangerin'sche Ableitung für unseren Fall benutzen dürfen, ausserdem aber die für unseren Fall nothwendige und von der Wangerin'schen mitunter abweichende Ableitung der Wegdifferenz Δ schon oben gegeben wurde.

Zunächst gilt für unseren Fall, dass durch das Zusammenwirken zweier beliebiger, im Punkte F interferirender Strahlen, von denen der eine direct durchgegangen, der andere ein- oder mehreremal in der Lamelle reflectirt wurde, eine Intensität entsteht, die gegeben ist durch einen Ausdruck der Form:

$$M^2 + N^2 + 2MN \cos\left(\frac{\Delta}{\lambda} 2\pi\right),$$

wobei Δ wieder die Wegdifferenz der betreffenden Strahlen in F , λ die Wellenlänge und M und N die Amplituden der componirenden Wellenbewegungen bedeuten. Der Unterschied von der entsprechenden Formel beim reflectirten Licht beruht auf dem Vorzeichen des dritten Gliedes, das dort $-$, hier aber wegen der doppelten Reflexion des einen Strahles an Glasplatte und Linse und der sich daraus ergebenden doppelten Phasenänderung $= +$ sein muss. Dieser Unterschied ist eigentlich der einzige in Betracht kommende, der sich aber durch die ganze folgende Entwicklung hindurchzieht.

1) Wangerin, Wied. Ann. 20. p. 177. 1883.

Es wird nun die Intensität, hervorgerufen durch die Gesammtheit aller in F interferirenden Strahlenpaare, die nur kleine Winkel miteinander bilden — und nur diese kommen ja in Betracht —, gegeben durch den Ausdruck:

$$J = m \iint \left\{ M^2 + N^2 + 2MN \cos \left(\frac{A}{k} 2\pi \right) \right\} dF \\ = m\pi\varphi_1^2 \left\{ M^2 + N^2 + 2MN \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot A \right) 2 \cdot \frac{J_1(u_1)}{u_1} \right\}.$$

Hierbei ist m ein constanter Factor, J_1 die Bessel'sche Function mit dem Index 1, deren Argument:

$$u_1 = \varphi_1 \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{B^2 + C^2};$$

φ_1 ist der Winkel, unter welchem die Oeffnung des Beobachtungsinstrumentes, — resp. der beobachtenden Pupille, vom Punkte F aus erscheint, also jedenfalls eine sehr kleine Grösse, A , B , C aber sind Grössen, hergenommen aus dem Ausdrücke:

$$A = A + B\varphi \cos \psi + C\varphi \sin \psi,$$

in welcher Form, wie Hr. Wangerin nachweist, der Wegunterschied der betreffenden Strahlen sich jederzeit darstellen lässt, wenn man unter φ und ψ Kugelkoordinaten versteht mit demjenigen Punkte als Pol, der gegeben ist durch den Durchschnitt eines von F ausgehenden Axenstrahls und einer um F beschriebenen Kugelschale mit dem Radius 1. Dieser Axenstrahl kann dann betrachtet werden als die Axe eines Rotationskegels, in dem sämtliche das Auge treffende, wirksame und direct hindurchgegangene Strahlen sich befinden, zu deren jedem ein reflectirter, mit dem ersteren interferirender Strahl gehört, und zwar wird dieser Kegel, dessen Winkel an der Spitze $= \varphi_1/2$ natürlich eine sehr kleine Oeffnung haben.

Aus der letzten Gleichung geht direct hervor, dass J = Minimum in den Fällen, wo gleichzeitig $J_1(u_1)/u_1$ = Maximum und $\cos(2\pi/\lambda \cdot A) = -1$, d. h. wo $A = (2h - 1)\lambda/2$, wobei h alle natürlichen Zahlen bedeuten kann, — es ist aber $J_1(u_1)/u_1$ = Maximum für $\sqrt{B^2 + C^2}$ = Minimum.

Nun hatten wir früher gefunden, dass $A = (\gamma'_0/r)(u'^2 + v'^2) +$ Glieder dritter Ordnung, die, wie Hr. Wangerin nach-

weist, hier nicht zu berücksichtigen sind, da die Richtungsunterschiede der überhaupt wirksamen Strahlen selbst schon so unendlich gering sind, dass durch eine Berücksichtigung der höheren Glieder von Δ Werthe erhalten würden von einer Ordnung, die stets vernachlässigt wurde.

Wandeln wir den Ausdruck:

$$\Delta = \frac{\gamma'_s}{r} (u'^2 + v'^2) = \frac{\gamma'_s}{r} \left\{ \left[\bar{z} - \frac{\alpha'_s}{\gamma'_s} (\delta'_1 - Z) \right]^2 + \left[H - \frac{\beta'_s}{\gamma'_s} (\delta'_1 - Z) \right]^2 \right\}$$

mit Hülfe des eben angegebenen Kugelkoordinatensystems um und führen ausserdem unsere früher angewandten Coordinaten x, y, z , sowie den Winkel ϑ ein, so folgt:

$$\Delta = \frac{1}{r} [(x^2 + y^2) \cos \vartheta - 2xz \varphi \cos \psi + (x^2 + y^2) \sin \vartheta \varphi \cos \psi + 2y(z + z_1) \cos \vartheta \varphi \sin \psi].$$

Durch Vergleichung mit dem oben angegebenen allgemeinen Ausdrucke:

$$\Delta = A + B \varphi \cos \psi + C \varphi \sin \psi$$

finden wir aber:

$$A = \frac{(2h-1)\lambda}{2} = \frac{(x^2 + y^2) \cos \vartheta}{r},$$

$$B = \frac{1}{r} [(x^2 + y^2) \sin \vartheta - 2xz \varphi \cos \psi]; \quad C = \frac{2y(z + z_1) \cos \vartheta}{r}.$$

Nun war für die Stellen der Minima von Lichtintensität die Bedingung gültig, dass $B^2 + C^2 = \text{Minimum}$, — wir haben also z , das durch die Bedingung $A = (x^2 + y^2) \cos \vartheta / r$ gar nicht berührt wird, so zu bestimmen, dass für gegebene Werthe von x, y eben $B^2 + C^2 = \text{Minimum}$, d. h. dass:

$$B \cdot \frac{\partial B}{\partial z} + C \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Daraus erhalten wir aber:

$$(x^2 + y^2) x \sin \vartheta - 2z(x^2 + y^2 \cos^2 \vartheta) + 2(\delta_1 - \delta_2) y^2 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta = 0.$$

Dies ist aber genau die Gleichung unserer Interferenzfläche (cf. 34b), während uns der Werth von Δ direct die zweite, früher gefundene Formel liefert:

$$x^2 + y^2 = \frac{(2h-1)\lambda r}{2 \cos \vartheta} = a_1^2.$$

Es erübrigt noch, bevor wir aus (33) und (34) die allgemeinen Schlüsse ziehen, auf die Strahlenpaare Rücksicht zu nehmen, die zwar auch im Punkte F zur Interferenz gelangen, von denen aber kein Strahl vollkommen in der Richtung der Mikroskopaxe verläuft, sondern die sämmtlich sehr kleine Winkel mit derselben einschliessen, — denn dass nur solche in unser Auge gelangen und zu berücksichtigen sind, liegt bei unserer Annahme von dem nahezu parallelen Einfall der Strahlen sowie bei dem relativ geringen Durchmesser des beobachtenden Instrumentes, resp. unserer Pupille, auf der Hand. Nun hatten wir gefunden (cf. 19 und 22):

$$A = \frac{\gamma'_5}{r} [u'^2 + v'^2 + (u'^2 + v'^2) \left(\frac{\alpha'_5 u'}{\gamma'_5 r} + \frac{\beta'_5 v'}{\gamma'_5 r} \right) \frac{n^2 - 1}{n \gamma'_5 \gamma'_5}] + \text{andere}$$
 Glieder dritter Ordnung], oder, wenn wir mit k_1 das in A_1 und A'_1 übereinstimmende, mit k_2 die in beiden verschiedenen Glieder dritter Ordnung bezeichnen:

$$A_1 = \frac{\gamma'_5}{r} [u'^2 + v'^2 + k_1 + k_2]; \quad A'_1 = \frac{\gamma'_5}{r} [u'^2 + v'^2 + k_1 - k_2].$$

Wir wollen die Werthe $\alpha'_5, \beta'_5, \gamma'_5$ um sehr kleine Grössen $\delta\alpha'_5, \delta\beta'_5, \delta\gamma'_5$ verändern, wodurch gleichzeitig u' in $u' + \delta u'$; v' in $v' + \delta v'$ übergeht, k_1 und k_2 in resp. $k_1 + \delta k_1$; $k_2 + \delta k_2$. Dann erhalten wir für alle beliebige solcher, durch den Punkt F gehender Strahlenpaare eine Wegdifferenz, gegeben durch:

$$A' = \frac{\gamma'_5 + \delta\gamma'_5}{r} [(u' + \delta u')^2 + (v' + \delta v')^2 + (k_1 + \delta k_1) \pm (k_2 + \delta k_2)].$$

Hierbei dürfen wir sicher annehmen, dass die Werthe der Grössen $\delta\alpha$ etc. die Grösse u'/r , die wir ja als sehr klein, und zwar von der Ordnung φ betrachtet hatten, nicht übersteigen; dann aber werden die Grössen $\delta u'^2, \delta v'^2, \delta k_1, \delta k_2$ einer höheren Ordnung des unendlich Kleinen angehören, als wir sie bisher in die Untersuchung aufgenommen hatten, sie sind also zu vernachlässigen, und es ergibt sich:

$$A' = \frac{\gamma'_5}{r} [u'^2 + v'^2 + k_1 \pm k_2 + 2(u' \delta u' + v' \delta v')] + \frac{\delta\gamma'_5}{r} (u'^2 + v'^2),$$

oder, wegen $\gamma'_5/r (u'^2 + v'^2 + k_1) = (2h - 1)\lambda/2$ und $k_2 = 0$:

$$A' = \frac{(2h - 1)\lambda}{2} + \frac{2\gamma'_5}{r} (u' \delta u' + v' \delta v') + \frac{\delta\gamma'_5}{r} (u'^2 + v'^2).$$

Die Punkte, für welche $A' = (2h - 1)\lambda/2$, würden also diejenigen sein, in denen nicht nur die Hauptstrahlenpaare, sondern sämtliche in den betreffenden Punkten interferierenden und ins Auge gelangenden Strahlenpaare ein Minimum der Intensität lieferten. Für die anderen Punkte, in welchen:

$$\frac{2\gamma'_5}{r}(u'\delta u' + v'\delta v') + \frac{\delta\gamma'_5}{r}(u'^2 + v'^2) \text{ zwar nicht } = 0,$$

aber doch sehr klein ist, werden wir auch kein Minimum der Intensität, aber doch nur eine geringe Intensität des Lichtes, d. h. immerhin noch verhältnismässige Dunkelheit haben. Wir müssen also untersuchen:

Wann wird $A' - (2h - 1)\lambda/2 = 0$ oder sehr klein?

Zu diesem Zwecke führen wir für $\alpha'_5, \beta'_5, \gamma'_5$ neue Variablen ein, indem wir setzen:

$$\alpha'_5 = \sin \vartheta \cos \mu, \quad \beta'_5 = \sin \vartheta \sin \mu, \quad \gamma'_5 = \cos \vartheta$$

und untersuchen, welchen Werth $A' - (2h - 1)\lambda/2$ erhält bei Veränderung der Grössen ϑ, μ um die kleinen Werthe $\delta\vartheta, \delta\mu$, wobei wir dann das Coordinatensystem so legen, dass die Ξ -Axe wieder parallel der Projection der Mikroskopaxe auf die Ξ -H-Ebene wird, ϑ den Winkel zwischen der Z-Axe und der Mikroskopaxe bezeichnet und $\mu = 0$ wird (aber nicht $\delta\mu$!). Hierdurch erhalten wir:

$$A' - \frac{(2h-1)\lambda}{2} = \delta\vartheta \left\{ -\operatorname{tg} \vartheta \cdot \frac{(2h-1)\lambda}{2} + \frac{2}{r \cos \vartheta} [\Xi + \operatorname{tg} \vartheta (Z - \delta_1)] (Z - Z_0) \right\} \\ + \delta\mu \cdot \frac{2 \sin \vartheta \cdot H(Z - \delta_1)}{r}.$$

Führen wir hier unser früheres Coordinatensystem X, Y, Z ein und benutzen noch Gleichung (34_b), so folgt endlich:

$$(35_a) \quad \left\{ \begin{aligned} & r \left(A' - \frac{(2h-1)\lambda}{2} \right) \\ & = \left[\frac{(x^2 + y^2) \sin \vartheta + 2z_1 x}{x^2 + y^2 \cos^2 \vartheta} \right] y \cdot \cos \vartheta \left[-y \cos \vartheta \cdot \delta\vartheta + x \sin \vartheta \cdot \delta\mu \right] \end{aligned} \right.$$

$$(35_b) \quad \left\{ \begin{aligned} & = \frac{2(z + z_1)y \cdot \cos \vartheta}{x} \cdot (-y \cos \vartheta \cdot \delta\vartheta + x \sin \vartheta \cdot \delta\mu), \end{aligned} \right.$$

wobei:

$$z_1 = \frac{(\delta'_5 - \delta_1) \sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta}.$$

War dieser Ausdruck $= 0$ für irgend einen Punkt x, y, z , — welchen Werth dabei auch $\delta\vartheta, \delta\mu$ haben mag, — natürlich innerhalb der oben angegebenen beschränkten Grenzen, dann findet also nicht nur für die beiden Hauptstrahlenpaare, sondern auch für jedes andere in Betracht kommende Strahlenpaar in diesem Punkte eine vollkommene Interferenz statt, d. h. wir haben dann einen dunklen Punkt vor uns.

Wir können die Schlüsse, die sich aus den Gleichungen (33), (34), (35) wegen deren Analogie mit den entsprechenden für reflectirtes Licht ohne weiteres ziehen lassen, folgendermassen kurz zusammenfassen:

Auch beim durchgehenden, — ebenso wie beim reflectirten Lichte liegen die Newton'schen Farbenringe auf einer Regelfläche dritter Ordnung, die sich nur in dem Falle auf eine Ebene reducirt, wenn der Einfallswinkel $= 0$ ist. Sie entsteht in der Weise, dass eine Gerade, die auf der einen unendlich grossen Directrix $R_1 M_1' \dots$ (cf. Fig. 5) hingleitet, zugleich die zweite, endliche Directrix $P_1 Q_1$ so schneidet, dass:

$$R_1 M_1' = \pm \frac{2 \cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta} \cdot P_1 Q_1 \sqrt{\frac{P_1 M_1'}{M_1 Q_1}}.$$

Diese zweite, endliche Directrix hat die Richtung der Mikroskopaxe, der Punkt P_1 ist der scheinbare Berührungspunkt von Linse und Platte, den Punkt Q_1 erhalten wir, wenn wir das auf den Punkt P_1 eingestellte Mikroskop um das Stück:

$$P_1 Q_1 = z_1 = \frac{(n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \vartheta_1}{n \cos \vartheta_1} d' = \frac{(\delta_2' - \delta_1') \sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta}$$

in der Richtung seiner Axe verschieben.

Die erste unendlich grosse Directrix $R_1 M_1'$ verläuft parallel zur Y -Axe; der Punkt R_1 liegt auf der sogenannten Hauptgeraden $H_1 - H_1$, deren Gleichung wir aus (33_b) erhalten, wenn wir darin $H = 0$ setzen, und die mit der Z -Axe einen Winkel ω bildet, der gegeben ist durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta}.$$

Das Stück $R_1 P_1$ ergibt sich aus der Gleichung:

$$R_1 P_1 = \frac{P_1 Q_1 \cdot \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}.$$

Diese so erhaltene Interferenzfläche unterscheidet sich nun von der beim reflectirten Lichte nur dadurch, dass letztere unter anderem nur abhängt von der Dicke der Glasplatte, erstere dagegen von der Dicke der Glaslinse. Sind beide Dicken gleich, so stimmen auch beide Interferenzflächen mit ihren sämtlichen ausgezeichneten Linien und Punkten vollkommen überein, dagegen liegen beide entgegengesetzt, so zwar, dass die eine genau das Spiegelbild der anderen in Bezug auf die untere Fläche der Glasplatte darstellt. Wir würden also nach (33) die Gleichung für beide Interferenzflächen zusammenschreiben können:

$$\begin{aligned} & 2\{[\bar{z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 \pm Z)]^2 + H^2\} (\delta_1 \pm Z) \\ & + 2 \operatorname{tg}^2 \vartheta [\bar{z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 \pm Z)]^2 (\delta_2 \pm Z) \\ & + \operatorname{tg} \vartheta [\bar{z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 \pm Z)] \{[\bar{z} - \operatorname{tg} \vartheta (\delta_1 \pm Z)]^2 + H^2\} = 0, \end{aligned}$$

wobei das obere Zeichen für die Interferenzfläche des reflectirten, das untere für die des durchgehenden Lichtes gilt und bei ersterer das in den δ enthaltene d die Dicke der Glasplatte, bei letzterer die der Glaslinse bezeichnet.

Schneiden wir die Interferenzfläche durch Ebenen, parallel der centralen Einfallsebene, welche letztere charakterisirt ist durch die Gleichung $H = 0$, so erhalten wir Curven von der Form Fig. 6, die wieder als Spiegelbilder der entsprechenden Curven beim reflectirten Lichte anzusehen sind. In Fig. 6 sind zwei solcher Curven in einer Ebene gezeichnet; dieselben schneiden sich, — so viele man deren auch zeichnen wollte, sämtlich in R_1 , haben eine gemeinschaftliche Tangente in Q_1 und die Hauptgerade $H_1 - H_1$ zur Asymptote.

Die XZ -Ebene ist eine Symmetrieebene für die Fläche, nicht aber die YZ -Ebene (centrale Querebene) und die XY -Ebene (Horizontalebene). Die durch die Hauptgerade und die Y -Axe gelegte Ebene (die Hauptebene) schneidet die Fläche in einer Geraden, die durch R_1 senkrecht zur Einfallsebene geht und als die eine Directrix bereits früher erwähnt wurde. Die Entfernung der Curven, die durch

Schnitte parallel der XZ -Ebene gebildet sind, von der Hauptebene, gemessen in der Richtung unserer Z -Axe, hat zwei Maxima, ein kleineres unterhalb und ein grösseres oberhalb der Hauptebene, und zwar liegen diese Maxima um so näher an der centralen Querebene, je näher der betreffende Schnitt der XZ -Ebene kommt, sie werden aber auch um so kleiner und schliesslich $= 0$. Je weiter man sich umgekehrt von derselben, der centralen Einfallsebene, entfernt, desto mehr nimmt die Senkung der lichtnahen Hälfte unter die Hauptebene und die Entfernung der lichtfernen Hälfte über dieselbe zu, — an Grösse überwiegt immer die letztere.

Auf dieser Interferenzfläche liegen sämtliche Ringe. Diese sind Curven doppelter Krümmung, und zwar Durchschnitte der coaxialen, elliptischen Cylinder, deren Leitlinien parallel der Mikroskopaxe laufen, mit der Interferenzfläche. Die Projection der Ringe in der Richtung der Mikroskopaxe auf eine Horizontalebene ergibt ein System von concentrischen Kreisen. Die in der centralen Einfallsebene befindlichen Ringdurchmesser liegen alle auf der Hauptgeraden, deren Neigung gegen die Horizontalebene, — ebenfalls abhängig vom Einfallswinkel des Lichtes, genau übereinstimmt mit den entsprechenden beim reflectirten Lichte und gleichfalls als deren Spiegelbild angesehen werden kann. Infolge dessen sinkt zwar, — umgekehrt wie beim reflectirten Lichte, die der Lichtquelle zugewandte Hälfte der Durchmesser unter die Horizontale, die andere steigt darüber, aber man muss bei Beobachtungen dem Verlaufe dieser Hauptgeraden nach das Mikroskop ganz in demselben Sinne, wie dort, verschieben, da es ja auf der entgegengesetzten Seite des Linsensystems steht.

Die Durchmesser der einzelnen dunklen Ringe, gemessen auf der Horizontalebene, sind proportional den Quadratwurzeln aus den ungeraden Zahlen, ihr Mittelpunkt ist der scheinbare Berührungspunkt von Platte und Linse.

In der zur centralen Einfallsebene senkrechten Richtung findet sich hier, wie beim reflectirten Lichte, eine Quergerade, welche sämtliche Ringe trifft. Die auf dieser gemessenen Durchmesser der Ringe sind ganz gleich den

entsprechenden Durchmessern der in der Richtung der Mikroskopaxe auf die Horizontalebene projecirten Kreise.

Die lichtnahe Hälfte der Ringe senkt sich langsamer und weniger tief unter die senkrecht zur centralen Einfallsebene durch die Hauptgerade gelegte Ebene (Hauptebene), als sich die lichtferne darüber erhebt, und einzelne Ringe können, — namentlich bei kleinen Einfallswinkeln, ganz oberhalb derselben liegen.

Der Mittelpunkt des Ringsystems, — der scheinbare Berührungspunkt von Platte und Linse, erscheint natürlich im durchgehenden Lichte hell, nicht, wie beim reflectirten, dunkel, aber auch für ihn gilt der von Hrn. Wangerin gefundene Satz, dass man das auf den scheinbaren Berührungspunkt P_1 eingestellte Mikroskop beliebig längs seiner Axe verschieben kann, ohne dass der helle Fleck verschwindet.

Im allgemeinen können wir sagen, dass beim durchgehenden Lichte von den dunklen Ringen dasselbe gilt, was beim reflectirten für die hellen gelten würde.

Fassen wir wieder unsere Interferenzfläche als Spiegelbild derjenigen des reflectirten Lichtes auf, so würden unsere dunklen Ringe die Spiegelbilder der hellen im reflectirten Lichte sein, nicht nur ihrer Lage, sondern auch ihrer Beschaffenheit nach: Denn, wie beim reflectirten Lichte die dunklen Ringe nahezu vollkommen dunkel, die hellen dagegen nur unvollkommen hell erscheinen können, so sind umgekehrt in unserem Falle die hellen Ringe vollkommen hell, die dunklen dagegen nur unvollkommen dunkel, beides infolge des Einflusses der in der Luftlamelle mehrfach reflectirten Strahlen.

Was die einzelnen Ringe betrifft, so liegen die Helligkeitsminima sämmtlicher Ringe in der centralen Einfallsebene, weiterhin aber zeigen noch die innersten Ringe auf der von der Lichtquelle abgewandten Seite je zwei in Bezug auf die Einfallsebene symmetrisch liegende Minimalpunkte. Die sämmtlichen übrigen Punkte sind — wegen der anderen, nicht in der Richtung der Mikroskopaxe verlaufenden Strahlenpaare — weniger deutlich und nehmen an Deutlichkeit

ab, je grösser die Ringzahl und der Einfallswinkel des Lichtes wird.

Der Grund endlich für den Umstand, dass im durchgehenden Lichte die Newton'schen Farbenringe viel weniger deutlich sind, als im reflectirten, ist wohl darin zu suchen, dass in ersterem Falle der zweimal reflectirte Strahl eines jeden interferirenden Strahlenpaares gegenüber dem direct durchgehenden eine doppelte, bedeutende Schwächung seiner Intensität durch die doppelte Reflexion — an Linse und Glasplatte — erleidet, und die Interferenz deshalb nicht eine nahezu vollkommene sein wird, wie beim reflectirten Lichte, wo beide Strahlen, sowohl der an der Glasplatte wie der an der Linse reflectirte, durch eine einmalige Reflexion eine gleichmässige Schwächung erleiden; die von Fresnel für die Intensität des reflectirten und gebrochenen Lichtes aufgestellten Formeln gewähren hierzu leicht eine deutliche Veranschaulichung durch Zahlen.

II. *Intensitätsmessungen des diffusen Tageslichtes;* *von Leonhard Weber.*

(Hierzu Taf. IV Fig. 7–16.)

Die wenigen bisher vorliegenden Messungen der Intensität des diffusen Lichtes leiden einerseits an dem Mangel einer präzisen Definition dessen, was unter jener Intensität zu verstehen ist, andererseits an einer passenden Auswahl derjenigen Hülfsheile, welche den gebräuchlichen photometrischen Apparaten zu gedachtem Zwecke hinzuzufügen sind. Die nachfolgenden Mittheilungen versuchen es, diesen Mängeln in etwas abzuhefen, und es soll deswegen im Abschnitt I eine Definition und geometrische Darstellung der Intensität des diffusen Lichtes, in II eine Methode der Beobachtung desselben und in III eine Anwendung auf die Ausmessung des diffusen Tageslichtes beschrieben werden.

I. Darstellung der Intensität des diffusen Lichtes.

Sei P ein Punkt, der vom diffusen Lichte getroffen wird. Man könnte versuchen, die Intensität des letzteren durch einen einzigen Zahlenwerth auszudrücken etwa dadurch, dass man einen Ausdruck für die lebendige Kraft des in der Volumeneinheit bei P schwingenden Lichtäthers aufstellt, oder dadurch, dass man die Lichtmenge angibt, welche auf eine um P beschriebene Kugel fällt. Durch dies Verfahren würden nun zwar Werthe gewonnen werden können, welche eine gewisse von der Intensität des Lichtes abhängige Grösse darstellen; allein man würde keineswegs eine vollständige Beschreibung jener Intensität hierdurch gewinnen. Zu einer solchen sind vielmehr allgemein unendlich viele Zahlenangaben oder eine entsprechende räumlich ausgedehnte geometrische Darstellung erforderlich. Diese wird wiederum verschieden ausfallen, jenachdem durch dieselbe entweder 1) die Position und Intensität der den Punkt P umgebenden leuchtenden Körper oder 2) die Beleuchtungsverhältnisse eines in P gedachten Körpers dargestellt werden sollen. Im Falle 1) würde die Darstellung derart zu machen sein, dass man von P aus nach allen Richtungen des Raumes Strahlen zieht, und die Länge jedes desselben proportional mit der Helligkeit des von ihm getroffenen leuchtenden Körpers macht. Legte man alsdann durch die Endpunkte dieser Radienvectoren eine begrenzende Fläche, so würde man einen um P liegenden Körper erhalten, welcher eine vollständige Beschreibung des von allen Seiten auf P einstrahlenden Lichtes enthielte. Der Fall 2), nämlich die Darstellung der Beleuchtung eines in P gedachten Körpers oder der Helligkeit, welche seine einzelnen Theile erhalten, wird hiermit nicht zugleich erledigt. Denn hierzu müsste man berechnen, wie gross die Lichtmengen sind, die von den leuchtenden Körpern auf die einzelnen Flächentheile eines in P befindlichen Körpers geworfen werden. Eine vollständige Beschreibung der Intensität des diffusen Lichtes in einem Punkte P besteht demnach in diesem zweiten Sinne darin, für alle denkbaren Lagen eines in P befindlichen Flächenele-

menten df die Lichtmengen anzugeben, welche auf dasselbe fallen. Es ist also eine ähnliche Supposition erforderlich, wie man sie braucht, um den Druck in einer Flüssigkeit an einer Stelle zu definiren. Während aber in letzterem Falle die Lage des Flächenelementes gleichgültig ist, ist dies zur Angabe der Lichtintensität von wesentlichem Belang. Man wird also im allgemeinen verschiedene Zahlenwerthe erhalten je nach der Lage des gedachten Elementes df . Diese unendlich vielen Zahlenwerthe sind nun freilich der Darstellung durch eine einzige der Potentialfunction gleichgebildete Function der rechtwinkligen Coordinaten fähig, deren Differentialquotienten nach verschiedenen Richtungen genommen, die Lichtmengen angeben würden, welche das auf jene Richtungen senkrecht stehende Element df empfängt. Vorderhand ist es jedoch vorzuziehen, die je nach der Lage des Elementes df variablen Lichtmengen einer directen geometrischen Darstellung zu unterwerfen.

Zu diesem Zweck seien (Fig. 7) $df\ df'\ df''$ die verschiedenen Lagen von df ; $n\ n'\ n''$ die entsprechenden Normalen; $q\ q'\ q''$ die entsprechenden Lichtmengen. Man kann alsdann um den Punkt P einen Körper construiren von der Beschaffenheit, dass die Länge der einzelnen von P aus in den Richtungen $n\ n'\ n'' \dots$ gezogenen Radienvectoren proportional ist denjenigen Lichtmengen $q\ q'\ q'' \dots$, welche auf die zu $n\ n'\ n'' \dots$ senkrechten Elemente $df\ df'\ df'' \dots$ fallen. Ein solcher Körper würde die vollständige Beschreibung der für die Beleuchtung eines in P befindlichen Körpers in Betracht kommenden Intensitätsverhältnisse des diffusen Lichtes enthalten und könnte etwa bezeichnet werden als der für P geltende Helligkeitskörper der vorhandenen Lichtquellen.

Die Construction eines solchen Helligkeitskörpers möge hier für zwei einfache Fälle durchgeföhrt werden.

a) Gegeben ein in grossem Abstände R von P gelegener leuchtender Punkt A (s. Fig. 8). df sei eine der Lagen des in P zu fingirenden Flächenelementes, i der Winkel APn , Pn die Normale zu df . Dann ist mit Benutzung bekannter

photometrischer Grundformeln die auf df fallende Lichtmenge q :

$$q = \frac{J \cdot \cos i \cdot df}{R^2}$$

oder wenn man, um unabhängig von der Grösse df zu sein, mit $h_n = q/df$ die durch A für die betreffende Lage von df indicirte Helligkeit bezeichnet:

$$h_n = \frac{J \cdot \cos i}{R^2}.$$

Da für verschiedene Richtungen n J und R constante Grössen sind, so ist allgemein:

$$h = C \cdot \cos i.$$

Wählt man die Constante C beliebig, etwa entsprechend einer conventionellen Lichteinheit, und macht $P_n = h$, so sieht man leicht, dass für variable Lage von df und mithin von P_n alle Punkte n auf der Oberfläche einer Kugel liegen, deren Mittelpunkt auf der Linie AP um $C/2$ von P entfernt liegt. Der Helligkeitskörper ist also in diesem Falle eine Kugel.

b) Gegeben sei eine leuchtende Halbkugel von überall gleicher Helligkeit H . Es soll der Helligkeitskörper für einen im Mittelpunkt der Basisfläche gelegenen Punkt P berechnet werden.

df sei eine beliebige Lage des beleuchteten Elementes in P . Dasselbe empfängt dann Licht von dem sphärischen Zweieck CB (s. Fig. 9), dessen Oeffnungswinkel $= 180^\circ - \alpha$ ist, wenn α die Zenithdistanz der Normalen von df ist.

Die Beleuchtung von df ist offenbar dieselbe, als wenn ein in der Basisfläche AB bei P gelegenes Element von dem sphärischen Zweieck AD beleuchtet würde, wobei AD wiederum $= 180^\circ - \alpha$ ist. Die letztere Beleuchtung kann in folgender Weise berechnet werden. In der Basisfläche AB ziehe man die zu AB Senkrechte LM (s. Fig. 10). Durch L und M lege man grösste Kreise, deren zwei den Abstand $d\vartheta$ haben mögen, rechtwinklig dazu Parallelkreise, deren zwei den Abstand $d\varphi$ haben mögen. Die Grösse eines Flächenelementes dF ist alsdann:

$$dF = r^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\vartheta,$$

wenn r der Radius der Halbkugel ist. Die von dF auf das in AB bei P liegende Element df geworfene Lichtmenge ist dann:

$$q = \frac{dF \cdot df \cdot H \cdot \cos i}{r^2},$$

worin i den Winkel bedeutet, welchen die Linie PdF mit der auf AB Senkrechten bildet. Es ist aber:

$$\cos i = \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$$

und mithin: $q = H \cdot df \sin^2 \varphi \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$.

Durch Integration bezüglich φ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 180^\circ$ findet man die von dem Elementarzweieck $LdFM$ auf df geworfene Lichtmenge:

$$H \cdot df \cdot \frac{\pi}{2} \sin \vartheta d\vartheta,$$

durch abermalige Integration in Bezug auf ϑ von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = 180 - \alpha$ ergibt sich die von dem Zweieck AD auf das in AB gelegene Flächenelement geworfene Lichtmenge zu:

$$Hdf \cdot \pi \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

oder die indicirte Helligkeit des von AD beleuchteten Elementes df ist:

$$h = H \cdot \pi \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Dies ist aber, wie oben bemerkt, dieselbe Helligkeit, welche das Element df in der in Fig. 9 gezeichneten Lage von dem Zweieck CB erhalten würde, also die zunächst zu berechnende Grösse.

Construirt man nun mit den Werthen h um den Punkt P einen Körper, dessen Radienvectoren $\rho = h$ sind, so erhält man den Rotationskörper einer Kardioide (Fig. 11), deren Gleichung in Polarcoordinaten:

$$\rho = H \cdot \pi \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

ist. Das Rotationskardioid ist demnach der Helligkeitskörper für einen in der Mitte der Basisfläche gelegenen von einer überall gleich hellen Halbkugel beleuchteten Punkt.

Mit Berücksichtigung bekannter photometrischer Sätze erhält man dieselbe Form des Helligkeitskörpers, wenn der

Punkt P von einer unendlich ausgedehnten überall gleich hellen Ebene beleuchtet würde.

Diese beiden Beispiele a) und b) geben, wie sofort übersichtlich, die theoretische Lösung für zwei specielle Fälle der Tagesbeleuchtung auf freier Erdoberfläche. Das Beispiel a) entspricht näherungsweise dem Falle, in welchem die Sonne bei klarstem, also möglichst dunklem Himmel scheint. Das Beispiel b) entspricht dem Falle eines mit Wolken gleichmässig bedeckten Himmels von überall gleicher Helligkeit. Ist der Himmel gleichmässig hell, ohne dass die Sonne ganz verschleiert ist, so erhält man als Helligkeitskörper einen Raum, dessen Durchschnitt mit der durch die Sonne und den Beobachtungsort gelegten Verticalebene in Fig. 12 angedeutet ist, in welchem nämlich die einzelnen Radienvectoren die Summen der übereinander gelagerten Kugel- und Kardioidvectoren sind.

Die von der Sonne allein indicirte Maximalhelligkeit ist hierbei willkürlich gleich dem Dreifachen der vom Himmel indicirten Maximalhelligkeit gesetzt. Schon bei einigermassen klarem Himmel steigt das Verhältniss auf das Zehnfache und darüber, sodass dann der kugelförmige Helligkeitskörper der Fig. 8 nur geringförmig durch das Kardioid abgeändert wird.

In dem gewöhnlichen Falle eines durch einzelne Wolken ungleich hellen Himmels wird der Helligkeitskörper entsprechend unregelmässig.

II. Die Methode der Beobachtung.

Zur Darstellung der Intensität des diffusen Lichtes kommt es nach dem Voraufgegangenen nur darauf an, die Lichtmengen zu ermitteln, welche auf ein in verschiedene Lagen gebrachtes ebenes Flächenelement fallen, etwa einen weissen Carton oder dergleichen, oder anders ausgedrückt, die für ein solches Element indicirte Helligkeit h zu messen. Die letztere würde für eine dem Emanationsgesetz vollkommen gehorchende Fläche proportional der erlangten Helligkeit H (der *claritas visa* Lambert's) sein. Denn es bestehen folgende Relationen, wenn man noch mit q die

auffallende, mit q' die reflectirte gesammte Lichtmenge, mit h die indicirte Helligkeit und mit μ die Albedo der Fläche bezeichnet:

$$(1) \quad \frac{q'}{q} = \mu, \quad (2) \quad h = \frac{q}{df} = \frac{q'}{\mu \cdot df},$$

$$(3) \quad q' = \pi H \cdot df, \quad (4) \quad H = \frac{\mu \cdot h}{\pi}.$$

$$H = \frac{q'}{\pi df},$$

In dem fingirten idealen Falle einer solchen Fläche würde demnach eine Ausmessung von H zur Bestimmung von h genügen. Die Prüfung der Relation (4) kann für gegebene weisse matte Flächen in der Weise erfolgen, dass man dieselben durch eine punktförmige constante Lichtquelle J unter verschiedenen Incidenzwinkeln i beleuchtet. Es ist dann, wenn R der Abstand der Lichtquelle von der Fläche ist:

$$h = \frac{J \cdot \cos i}{R^2}$$

und es müsste demnach für ein constantes R , also für eine im Kreise herumgeführte Lichtquelle, J zufolge (4):

$$(5) \quad H = p \cdot \cos i$$

sein, worin p ein Proportionalitätsfactor ist. Die bekannten Typen weisser, glanzloser Flächen, wie Carton, Gyps, Flächen mit Barytweiss gestrichen, entsprechen der Relation (5) nur angenähert, und zwar meist nur für kleine Incidenzwinkel. So fand Kononowitsch¹⁾ für weissen Carton folgende Werthe, wobei für $i = 0^\circ$ $H = 1000$ gesetzt war:

i	H berechnet	H beobachtet	Differenz in Proc.
0	1000	1000	0
10	985	962	2
20	940	836	12
30	866	699	24
40	766	562	36
50	643	469	38
60	500	354	41
70	342	231	48

Aehnliche und in demselben Sinne gelegene Abwei-

1) Kononowitsch, Schrift. d. math. Abth. d. neurruss. naturf. Ges. 2. 1879 u. Fortschr. d. Phys. 35. p. 430. 1879.

chungen fand ich bei einer im reflectirten Lichte beobachteten, mit Barytweiss gestrichenen Tafel, sowie bei einer mattirten Milchglasscheibe. Obwohl die Abweichungen bei letzterer schon bedeutend geringer ausfielen, so suchte ich doch nach einer besseren Methode. Eine solche fand sich durch die Beobachtung des transparenten Lichtes einer matt geschliffenen Milchglastafel. Ist nämlich ν der Transparenzcoefficient einer solchen Platte, d. h. das Verhältniss des gesammten austretenden zu dem gesammten auffallenden Licht, so gelten die entsprechenden Relationen:

$$(4_a) \quad H = \frac{\nu \cdot h}{\pi} \quad \text{und} \quad (5_a) \quad H = p \cdot \cos i.$$

Die Prüfung von (5_a) wurde in folgender Weise gemacht. Auf einem starken um eine verticale Axe drehbaren, auf einer Tischfläche liegenden Brette wurde eine Gasflamme installirt, welche durch einen vorzüglichen Gasdruckregulator aus der Fabrik der Herren P. Suckow u. Co., Breslau, sehr constant erhalten werden konnte. Senkrecht über der Drehaxe in der Höhe der Flamme befand sich, fest aufgestellt, die aus weissem mattirten Milchglase bestehende vordere Verschlussplatte des weiter unten beschriebenen Photometers. Durch die Einstellung des letzteren wurde unmittelbar ein relatives Maass der Helligkeit des transparenten Lichtes der Platte gewonnen. Die Gasflamme wurde nun aus der anfänglichen Stellung senkrechter Incidenz von 10 zu 10 Grad im Kreise herumgedreht. Es ergaben sich bei vier hin und zurück gemachten Beobachtungsreihen folgende Werthe:

Einfallswinkel	Beobachtete Helligkeit $H = 1000$ für $i = 0^\circ$				Mittel der Beobachtung	cos Zahlen $\cos 0^\circ = 100$	Differenz in Proc.
	Reihe 1	Reihe 2	Reihe 3	Reihe 4			
0	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0
10	967	983	981	991	960	985	+ 0,51
20	920	927	952	942	935	940	+ 0,53
30	848	861	871	861	860	866	+ 0,70
40	749	748	761	759	754	766	+ 1,6
50	664	649	676	671	665	643	- 3,2
60	535	520	539	521	529	500	- 5,5
70	374	386	365	365	372	342	- 8,1
80	219	215	213	205	213	174	-18,3

Aus diesen Beobachtungen geht hervor, dass die Helligkeit einer mattirten Milchglasscheibe im transparenten Licht bis zu einem zwischen 40° und 50° liegenden Incidenzwinkel als proportional der nach dem Cosinusetz berechneten indicirten Helligkeit der vorhandenen Lichtquellen betrachtet werden kann. Bei grösseren Incidenzwinkeln wächst die beobachtete Helligkeit gegenüber der berechneten dem Vorzeichen nach in entgegengesetztem Sinne wie bei reflectirtem Lichte. Für die vorliegenden Zwecke wird demnach die Abweichung obiger Zahlen erst in Betracht kommen, wenn die transparenten, zur Beobachtung verwandten Platten unter sehr grossen Incidenzwinkeln von den Lichtquellen beleuchtet werden, wenn also z. B. eine horizontal aufgestellte Platte von der niedrig stehenden Sonne beleuchtet wird. Einen wie geringen Einfluss dagegen die gefundenen Abweichungen auf das Gesamtergebnisse haben, wenn die Lichtquellen gleichmässig vertheilt sind, wenn also z. B. eine horizontale Milchglastafel von einem gleichmässig hellen Himmel beleuchtet wird, erkennt man folgendermassen:

Ein in P (Fig. 13) liegendes horizontales Element werde von der in gleichmässiger Helligkeit H gedachten Halbkugel AZB beleuchtet. Man zerlege sich die letztere durch Parallellkreise in Elementarzonnen, welche mit dem Horizonte parallel laufen. Eine solche, etwa in der Zenithdistanz i gelegene besitze die Projection dl bezüglich einer Verticalen. Alsdann ergibt sich leicht, dass die von dieser Elementarzone für das Element df indicirte Helligkeit gleich ist:

$$\frac{2\pi \cdot l \cdot dl \cdot df \cdot H}{R^2},$$

oder, anders ausgedrückt, proportional dem Inhalte des unendlich schmalen Trapezes zq . Hieraus folgt sofort, dass die ganze von der Zone α indicirte Helligkeit durch Pzq , die von der Calotte i indicirte Helligkeit durch $ZzqQ$ und die von der ganzen Halbkugel indicirte Helligkeit durch das Dreieck ZPQ dargestellt wird.

Die dem Horizonte benachbarten Zonen des Himmels tragen mithin sehr wenig zur Gesammtheit der für das horizontale Flächenelement indicirten Helligkeit bei. So liefert

die Zone bis zu 10° über dem Horizont, wie leicht zu berechnen, nur $0,0303 \dots (= \cos^2 80^\circ)$ oder 3 Proc. der von der ganzen Hemisphäre herrührenden Helligkeit. Nimmt man daher die transparente Helligkeit einer von dem Himmel erleuchteten Milchglasplatte als Maass der indicirten Helligkeit, so werden die obigen, bei grösseren Incidenzwinkeln auftretenden Abweichungen von dem Cosinusgesetz das Gesamtergebnis dennoch nur geringfügig beeinflussen. In Fig. 14 ist das Dreieck ZPQ der Fig. 13 nochmals gezeichnet und gleichzeitig die Linie $Pq'q''Q$ gezogen, welche dadurch gewonnen ist, dass statt der Cosinuslinien zq die entsprechenden Beobachtungswerte von Tafel I eingetragen sind. Die Fläche $Pq'q''QZ$ ist, wie sich aus einer genauen graphischen Ermittlung ergab, nahezu 3 Proc. grösser, als das Dreieck PQZ . Um diesen Betrag wird demnach für den speciellen Fall des gleichmässig hellen Himmels die im transparenten Licht beobachtete Helligkeit zu gross ausfallen gegenüber der indicirten.

Im Falle eines dunklen Horizontes oder einer geneigten Lage der Milchglasplatte würde die Abweichung noch beträchtlich kleiner werden.

Die vorstehenden Ueberlegungen gestatten den Schluss: Es kann die Helligkeit des transparenten Lichtes einer matt geschliffenen Milchglasplatte, welche von diffusen Lichtquellen beleuchtet wird, im wesentlichen als proportional der von jenen Lichtquellen für die Lage der Glasplatte indicirten Helligkeit angesehen werden. Der dabei begangene Fehler ist nicht nur ein geringfügiger, sondern derselbe kann auch durch eine an dem Resultat anzubringende Correction bis auf eine zu vernachlässigende Grösse beseitigt werden. Insbesondere wird sich bei Wiedergabe der Beobachtungen des diffusen Tageslichtes zeigen, dass gegenüber den bedeutenden Schwankungen der zu messenden Grössen jener Fehler kaum in Betracht kommt.

Es bleibt noch zu erörtern, welche Maasseinheit der indicirten Helligkeit zu Grunde zu legen ist. Man kann eine solche aus einer der conventionellen Lichteinheiten, z. B. der

englischen Wallrathkerze oder Siemens'schen Platineinheit, herleiten, und es ist fast unmittelbar gegeben, diejenige Helligkeit gleich Eins zu setzen, welche von einer Kerze (Einheit) in der Entfernung eines Meters bei senkrechter Incidenz für eine ebene Fläche indicirt wird. Diese Einheit kann als Meternormalkerze bezeichnet werden.

Zur weiteren Klarstellung der Beziehung zwischen indicirter Helligkeit und derjenigen Helligkeit (der *claritas visa*) einer Fläche, welche uns dieselbe sichtbar macht, diene Folgendes. Ein weisser Carton, dessen Albedo μ ist, werde von einer Platineinheit (1 qcm Oberfläche schmelzenden Platins) in 1 m Entfernung bei senkrechter Incidenz beleuchtet. Die Helligkeit des schmelzenden Platins sei Φ ; diejenige des erleuchteten Cartons sei H . Dann geht die in Betracht kommende photometrische Grundformel:

$$\frac{\pi H}{\mu} = h = \frac{q}{df} = \frac{dF \cos i \cdot \cos e}{R^2} \cdot \Phi.$$

über in:

$$H = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{100 \cdot 100} \cdot \frac{\Phi \cdot \mu}{\pi},$$

oder, wenn man consequenterweise $\Phi = 1$ setzt, in:

$$H = \frac{1}{\pi \cdot 10000} \cdot \mu.$$

Da nun andererseits die indicirte Helligkeit des Cartons gleich Eins ist, so ergibt sich, dass eine Fläche, welche von Lichtquellen mit der indicirten Helligkeit von n Meterplatineinheiten beleuchtet wird, eine Helligkeit erlangt, welche gleich $n \cdot \mu / \pi \cdot 10000$ von derjenigen des schmelzenden Platins ist. Wird z. B. die indicirte Maximalhelligkeit im Sonnenschein zu 5000 Meterplatineinheiten gefunden, so wird ein daselbst senkrecht beschienener weisser Carton, dessen Albedo 0,85 betragen möge, eine Helligkeit besitzen, welche sich zu derjenigen des schmelzenden Platins verhält wie $(5000 \times 0,85) / (\pi \cdot 10000) : 1$ oder etwa wie 1:7,4. Diejenige indicirte Helligkeit, bei welcher noch ohne Nachtheil für das Auge gelesen werden kann, lässt sich auf $\frac{2}{3}$ Meterplatineinheiten oder ca. 10 Meternormalkerzen veranschlagen.

Die Methode der Beobachtung des diffusen Tageslichtes besteht also darin, eine matt geschliffene Milchglasplatte in verschiedenen Lagen dem Lichte zu exponiren, die Helligkeit des transparenten Lichtes zu messen und als Einheit dabei diejenige Helligkeit zu nehmen, welche durch eine in 1 m Distanz aufgestellte Lichteinheit entsteht.

Die bei photometrischen Untersuchungen solcher Lichtquellen auftretende Schwierigkeit, welche andere Farbe als das Normallicht besitzen, lässt sich bekanntlich auf rein physikalischem Wege nur insoweit beseitigen, dass man sich auf die spectrophotometrische Vergleichung einzelner Farben beschränkt, woraus jedoch nicht, wie das häufig geglaubt wird, ein Zahlenwerth für die Gesammtheit des beobachteten Lichtes resultirt. Man gelangt vielmehr zu einem solchen nur durch Benutzung von Methoden, welche mehr oder weniger physiologischen individuellen Einflüssen ausgesetzt sind. Dahin gehört z. B. die Vierordt'sche Methode und, streng genommen, auch die Wild'sche Methode der Beobachtung der minimalen Stärke der Interferenzstreifen bei verschieden gefärbtem Licht. Einen anderen auf die Methode der Sehschärfe basirten und mit einfacheren Hilfsmitteln zu verfolgenden Weg habe ich früher¹⁾ beschrieben. Derselbe ist in Kürze folgender. Diejenige Zahl, welche die bezüglich der Sehschärfe verstandene Aequivalenz entweder einer punktförmigen Lichtquelle oder einer indicirten Helligkeit im Vergleich zu den entsprechenden Grössen einer Normalkerze ausdrückt, sei als Beleuchtungskraft B bezeichnet, dann kann man:

$$B = k \cdot J, \text{ resp. } B = k \cdot H$$

setzen²⁾, worin J und H die Intensität, resp. die indicirte Helligkeit eines beliebig gewählten, möglichst monochromatischen Strahlenbündels der Lichtquellen z. B. des durch ein rothes Glas gegangenen Lichtes sind, und k ein von dieser Farbe und der Lichtquelle abhängiger Factor ist. Eine Bestim-

1) L. Weber, Electrot. Zeitschr. 5. p. 166. 1884.

2) L. Weber, Wied. Ann. 20. p. 326 ff. 1883.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXVI.

mung von k lässt sich dann entweder direct machen mit Hülfe von passenden Objecten, welche auf Erkennbarkeit geprüft werden¹⁾ oder dadurch, dass noch in einer zweiten Farbe, z. B. Grün, beobachtet wird und aus dem Verhältniss beider Werthe k mittelst einer durch besondere Vorversuche hergestellten Tabelle gefunden wird.

Die unter Abschnitt III beschriebenen Beobachtungen sind nun mit Hülfe theils eines rothen, theils eines grünen, vor das Auge gehaltenen Glases gemacht, deren Farbe noch genauer angegeben wird. Das rothe Glas ist soweit monochromatisch, dass Kerzen- und Tageslicht, dadurch gesehen, nicht zu unterscheiden ist. Dies ist völlig ausreichend, da eine absolute Monochromasie nicht erforderlich ist, vielmehr den Nachtheil haben würde, dass man geringe Lichtstärken nicht beobachten könnte. Das benutzte grüne Glas war nicht völlig so beschaffen, und ist deshalb der Einstellungsfehler ein wenig grösser. Jede der beiden Beobachtungsreihen in Roth und Grün gibt daher für sich ein rein physikalisches Maass für die Intensität des betreffenden physikalisch definirbaren Strahlencomplexes des Tageslichtes. Die Combination beider Reihen gestattet, einen physiologisch individuell beeinflussten Zahlenwerth für Aequivalenz des Tageslichtes mit dem Normallicht aufzustellen.

III. Anwendung auf das diffuse Tageslicht.

Eine vollständige Darstellung der Intensität des Tageslichtes besteht nach dem in I Gesagten in der Construction des einem Punkte der Erdoberfläche zukommenden Helligkeitskörpers, dessen einzelne Radienvectoren empirisch zu bestimmen sind aus der transparenten Helligkeit einer in verschiedene Lagen gebrachten mattirten Milchglastafel. Hierzu kann jeder photometrische Apparat benutzt werden, welcher die Helligkeit einer beliebig gemengt aufgestellten Fläche zu messen gestattet. Besonders bequem lässt sich dies, wie ich glaube, mit dem von den Herren Fr. Schmidt

1) L. Weber, Electrot. Zeitschr. 5. p. 169. 1884.

und Haensch nach meinen Angaben construirten Photometer¹⁾ ausführen. Schliesst man nämlich den drehbaren Tubus *B* (Fig. 15) mit einer mattirten Milchglasplatte *u* ab, welche nach Beseitigung des Abblendungsconus *k* noch vor den zur Aufnahme der Schwächungsgläser *b* bestimmten Kasten gesetzt wird und ihren Halt durch vier kleine Schraubköpfe gewinnt, so kann man durch Drehung des Tubus *B* diese Platte in jede beliebige Neigung gegen den Horizont bringen, und zwar immer derart, dass dieselbe von dem gesammten durch ihre Ebene markirten Himmelssegment beleuchtet wird, ohne dass die Stellung des Beobachters oder sonstige Theile des Apparates einen Schatten auf dieselben werfen. Die Einstellung und Ablesung des Apparates gibt dann sofort ein Maass für die Intensität des durch die vorgesetzte Milchglasplatte hindurchgegangenen Lichtes, und man erhält die vorhin beschriebene Einheit dieses Maasses, nämlich die Meterkerze, indem man einen zweiten Versuch in der Dunkelkammer macht, bei welchem die mattirte Milchglasplatte von einer Lichteinheit in 1 m Distanz senkrecht beleuchtet wird.

Beschränkt man sich, wie ich das bei den regelmässigen Beobachtungen in Breslau im December und Januar 1884/85, sowie im Juni und Juli 1885 gethan habe, auf die Ausmessung des verticalen Radiusvectors des Helligkeitskörpers, so kann man in Ermangelung eines vollkommen freien Beobachtungsplateaus das beschriebene Verfahren folgenden zwei Modificationen unterwerfen.

1. Falls zwei in einem Thurme vorhandene gegenüberliegende Fenster disponibel sind, welche beide von je der Hälfte der Himmelshemisphäre beschienen werden, so kann man zwei correspondirende Beobachtungen aus beiden Fenstern machen und die Resultate additiv vereinigen. Dabei ist der drehbare Beobachtungstubus des Photometers vertical ausserhalb des Fensters zu stellen, sodass die abschliessende Milchglasplatte *u* horizontal liegt, und durch einen leicht anzubringenden schwarzen Schirm ist das von der Mauer oder den Fenstern reflectirte Licht abzuhalten.

1) L. Weber, Wied. Ann. 20. p. 326. 1883. Centr. Zeit. f. Opt. u. Mech. 4. p. 181. 194. 1883. Journ. f. Gasb. u. Wasservers. 1885.

2. Falls in dem Dache des Beobachtungsortes eine Oeffnung vorhanden ist, kann man etwa so verfahren, wie ich die regelmässigen Beobachtungen im magnetischen Observatorium des physikalischen Institutes angestellt habe. Von der Decke *D* (s. Fig. 16) des Observatoriums *O* führt ein 1 m hoher, 63/63 cm weiter, mit Holz verkleideter Kanal *c* durchs Dach, der für gewöhnlich mit einer leicht zu beseitigenden Klappe verschlossen ist. Es wurde nun ein an beiden Enden offener Holzkasten *T* hergestellt von 1,60 m Länge und 40/40 cm Weite; derselbe wurde oben mit einer 40/40 cm grossen mattirten Milchglastafel *M* abgeschlossen, innen durch schwarze Tuchtapete ausgekleidet und mittelst dreier Holzknacken und Eisenträger derart in dem Kanale *c* aufgehängt, dass die Platte *M* genau horizontal und genügend hoch über dem Dache zu liegen kam. An dem unteren Ende wurde das Photometer *P* angeschraubt und der bewegliche Beobachtungstubus *B* desselben vertical gerichtet. Von einem Gerüste *G* aus wurde die Einstellung des Photometers gemacht. Das Einhängen von *T* konnte bequem in einigen Minuten gemacht werden.

Bei dieser Anordnung war *M* diejenige Platte, deren Helligkeit im transparenten Licht als Maass des von dem Himmel gesandten diffusen Lichtes, und zwar des verticalen Radiusvectors des Helligkeitskörpers benutzt wurde.

Nach Beendigung der täglichen Beobachtungen, deren jede in weniger als einer Minute zu machen war, wurde der Kasten *T* abgenommen, was mit wenig Handgriffen ausgeführt werden konnte, um die gegen Schmutz empfindliche Platte *M* vor Regen und Staub zu schützen.

Bei Anwendung dieser zweiten Modification erfährt natürlich jener Vorversuch, welcher zur Gewinnung des Einheitsmaasses oder mit anderen Worten zur Bestimmung der Constanten des Photometers erforderlich ist, eine entsprechende Aenderung, indem nun der ganze Holzkasten *T* in die Dunkelkammer gebracht werden muss.

Die gleichzeitige Anwendung der Modificationen 1) und 2) ergibt eine Controle für die Genauigkeit der Messung.

Ich habe solche Controlversuche an drei Tagen ausgeführt und erhielt:

Datum	Zeit	Mit Apparat Fig. 16.	Nach den Modificationen 1) aus dem Fenster nach:			
			WNW	OSO	NNO	SSW
13. Jan.	12 ^h 22—31'	3013	1460	1640	1610	1510
			3100		3120	
15. Jan.	12 ^h 20—27'	6607	1990	4370	1430	4920
			6360		6350	
16. Jan.	12 ^h 11—15'	3443	—		1640	1940
			3580			

Hierin bedeuten die fettgedruckten Zahlen die Grösse des verticalen Radiusvectors des Helligkeitskörpers gemessen nach Meterspermacetikerzen, und zwar für rothes Licht.

Die Details der regelmässigen Tageslichtbeobachtungen vom December und Januar finden sich in der meteorologischen Zeitschrift vom Mai und Juni 1885 abgedruckt. Die Resultate der in Breslau zur wahren Mittagszeit angestellten Beobachtungen vom December 1884, Januar, Juni, Juli 1885 waren:

	December		Januar		Juni		Juli	
	Roth	Grün	Roth	Grün	Roth	Grün	Roth	Grün
Monatsmittel	3834	11549	6875	20447	51802	151233	37309	105230
Maximum	9863	24270	13770	37330	76560	211800	69180	164400
Minimum	569	2178	1592	5385	4519	18410	8414	31120

Die genauere Definition der benutzten Farbencomplexe wurde mittelst eines Glan'schen Spectrophotometers gewonnen. Die Gläser wurden zu dem Zwecke vor die untere Hälfte des Spaltes gestellt, welcher auf eine von Gaslicht scharf beleuchtete mattirte Glasplatte gerichtet war. Die durch die Ablesungen gewonnenen Intensitätsverhältnisse wurden mit den Ordinaten einer aus den Macé de Lépinay'schen Untersuchungen resultirenden Intensitätscurve für Benzinlicht multiplicirt und ergaben dadurch zwei mit sehr scharf ausgeprägten Maximis versehene Curven für Roth und Grün. Das durch das rothe Glas gegangene Licht war merklich zwischen den Grenzen $\lambda = 600$ und $\lambda = 690$, und hatte ein sehr scharfes Maximum bei $\lambda = 630,5$; für das grüne Glas waren die entsprechenden Werthe $\lambda = 480$ bis $\lambda = 570$ mit einem Maximum bei $\lambda = 541,5$.

Breslau, August 1885.

III. *Ueber Herstellung des Farbendreiecks durch wahre Farbenmischung; von W. von Bezold.*

Bekanntlich hat schon Newton nachgewiesen, dass sich die Gesammtheit aller Farbenempfindungen, deren ein gesundes Auge fähig ist, sofern man die Helligkeit nicht in Betracht zieht, beziehungsweise über dieselbe in gewisser Weise verfügt, auf einer Fläche, der sogenannten Farbentafel darstellen lässt.

Will man auch noch die Helligkeit berücksichtigen, so braucht man nur die dritte Dimension zu Hülfe zu nehmen, wie dies zuerst Lambert bei der Construction seines Farbenkegels gethan hat.

Diese Art der Darstellung liefert bei richtiger Vertheilung der einzelnen Farben zugleich einen verhältnissmässig einfachen Ausdruck für das Gesetz der Farbenmischung insofern sich dasselbe alsdann auf blosse Schwerpunktsconstructionen zurückführen lässt, was ebenfalls schon von Newton angedeutet wurde.

Wie dieses Gesetz durch Hrn. v. Helmholtz und Maxwell nach der experimentellen, durch Grassmann nach der mathematischen Seite hin bewiesen wurde, darf ebenfalls als bekannt vorausgesetzt werden.

Wenn nun auch durch diese Untersuchungen das Gesetz in allgemeinen Zügen und in abstrakter Weise festgestellt ist, so hat es doch noch immer hervorragendes Interesse, eine solche Farbentafel in wirklichen Farben ausgeführt zu sehen.

Denn gar nicht zu reden davon, dass die Vorstellung von dem Wesen dieses Gesetzes durch eine solche Ausführung ganz ausserordentlich erleichtert wird, so lassen sich aus einer thatsächlich richtig ausgeführten Farbentafel eine Menge Einzelheiten entnehmen, die man selbst bei Wiederholung der oben angeführten Versuchsreihen doch nie so vollständig überblicken kann. Ja die Herstellung einer grösseren Anzahl richtiger Farbentafeln von verschiedenen Helligkeitsgraden, die dann zusammen genommen den Farbenkegel oder

die Farbenpyramide geben würden, wäre sogar für die Technik von hervorragender Bedeutung.

Man hat deshalb auch schon verhältnissmässig bald derartige Versuche gemacht. Da man jedoch hierbei stets von der unrichtigen Voraussetzung ausging, dass Mischung von Farbstoffen und Mischung der entsprechenden Farben gleichbedeutend sei, so konnten auch die erhaltenen Ergebnisse nicht richtig werden.

Selbst von den prachtvoll ausgeführten Farbenkreisen, welche man in dem Werke von Chevreuil findet¹⁾, gilt der eben gethane, etwas hart klingende Ausspruch, dass ihnen die eigentliche wissenschaftliche Bedeutung mangle, da auch sie ohne Benutzung des richtigen Farbenmischungsgesetzes und nach nicht einwurfsfreien Methoden ausgeführt sind.

Dieser Mangel springt schon bei dem ersten Blick auf eine solche Tafel in die Augen, da dieselben Gelb und Violett als Ergänzungsfarben enthalten, was bekanntlich unrichtig ist.

Nachdem aber Hr. v. Helmholtz durch seine bahnbrechende Untersuchung in diese Fragen Klarheit gebracht hatte²⁾, stellte sich die Aufgabe der Ausführung einer wirklich wissenschaftlich richtigen Farbentafel als so schwierig dar, dass man sich begnügte, entweder nur die Farbnamen in ein Diagramm einzuschreiben oder bei Anwendung von Farbendruck ein bloss angenähertes Bild zu geben, das auf nichts weiter Anspruch machen sollte als auf eine Unterstützung des Vorstellungsvermögens.³⁾

Ich habe zwar selbst einmal einen Versuch gemacht, eine wirklich richtige Farbentafel herzustellen, und habe zu dem Zwecke ein eigenes Instrument construirt⁴⁾, bei welchem die Doppelbrechung zur Farbenmischung benutzt wird, so-

1) Chevreuil, Mém. de l'Acad. 33. Atlas. 1861.

2) Müller, Arch. f. Anat. u. Pysiol. 1852. p. 461—482.

3) Dies gilt z. B. auch von den technisch sehr hübsch ausgeführten Farbenkreisen meiner Farbenlehre. Braunschweig 1874 u. Boston 1876.

4) W. v. Bezold, Sitzungsber. d. k. bair. Acad. d. Wiss. 1876. p. 206—112. od. Pogg. Ann. 158. p. 606—612. 1876.

wie eine Methode angegeben¹⁾, um Pigmentfarben mit Spectralfarben zu vergleichen, musste jedoch wegen anderer Arbeiten die Sache liegen lassen.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Herstellung einer solchen Tafel in grösseren Dimensionen, die sehr vielen Nuancen Aufnahme gewähren würde, für das Studium der Gesetze der Farbenempfindung von grösstem Interesse wäre.

Leider kann man nur dann mit Hoffnung auf Erfolg an die Ausführung gehen, wenn man über eine ganz enorme Zahl farbiger Muster von gleichem Material verfügt, da Auftragen mit dem Pinsel, wie ich mich überzeugte, nur unvollkommen zum Ziele führt.

Man müsste sich jedoch selbst dann noch begnügen, eine solche Tafel in einem oder in wenigen Exemplaren herzustellen, da an eine Vervielfältigung derselben nach den bekannten Methoden nicht gut gedacht werden kann.

Wenn ich oben behauptete, dass die Ausführung einer solchen Farbentafel von hervorragender Bedeutung wäre, so gründet sich dies auf die folgenden Betrachtungen:

Erstens würde man dadurch in den Stand gesetzt, die von Hrn. v. Helmholtz gemachten Bestimmungen über die complementären Farben zu verificiren, wenn man nach der oben angeführten Methode den Farbenton der in der Tafel enthaltenen Farben auf bestimmte Stellen im Spectrum beziehen würde, da sich eben nur nach diesen Messungen²⁾, sowie nach den sich daran anschliessenden ähnlichen Untersuchungen die Stellung der einzelnen Farbtöne am Rande der Farbentafel ermitteln lässt.³⁾

Ferner würde man dadurch mit einem Blicke die scheinbaren Sättigungsverhältnisse der Mischfarben übersehen können, ein Punkt, der nach den Untersuchungen von J. J. Müller für die physiologische Erklärung des Mischungsgesetzes von höchster Bedeutung ist.⁴⁾

1) W. v. Bezold, Sitzungsber. d. k. bair. Acad. d. Wiss. 1876. p. 1—5 od. Pogg. Ann. 158. p. 165—169. 1876.

2) v. Helmholtz, Pogg. Ann. 94. p. 1—28. 1855.

3) Vgl. auch v. Bezold, Pogg. Ann. 150. p. 71—93 u. p. 221—247. 1873.

4) J. J. Müller, Pogg. Ann. 139. p. 411—431 u. p. 593—613. 1870.

Diese scheinbaren Sättigungsverhältnisse hängen nämlich aus engste zusammen mit der Gestalt der Farbentafel, welche, wie bereits Young angedeutet, und Hr. v. Helmholtz streng nachgewiesen hat, unter der Annahme dreier physiologischer Grundfarben, keine Kreisform besitzen kann, sondern sich der eines Dreiecks nähern muss.

Geht man nämlich von drei objectiven Grundfarben aus, wofür man die sattesten des betreffenden Tones auswählen wird, und stellt man, natürlich immer durch wahre Farbenmischung, aus diesen alle erdenklichen Mischfarben her, so müssen diese ihre Stelle sämmtlich innerhalb des Dreiecks finden, das durch die Punkte der drei Grundfarben bestimmt ist. Haben nun die auf den Seiten des Dreiecks liegenden Mischfarben geringe (subjective) Sättigung, und gibt es Farben gleichen Tones, welche noch satter erscheinen, dann sind die letzteren ausserhalb dieses Dreieckes unterzubringen, und können alsdann die gewählten Grundfarben nicht als physiologische Grundfarben betrachtet werden. Kann man dagegen drei Farben ausfindig machen, welche der Bedingung genügen, dass sich innerhalb des von ihnen gebildeten Dreiecks oder wenigstens ohne zu bedeutendes Ueberschreiten desselben die Gesamtheit aller Farben unterbringen lässt, dann hat man darin einen der kräftigsten Belege für die Richtigkeit der Young-Helmholtz'schen Theorie.

Ein dritter Punkt endlich, der in einer solchen Farbentafel von selbst Berücksichtigung finden würde, bezieht sich auf gewisse Ausnahmen von dem Mischungsgesetze, wenigstens von der meist üblichen Auffassung dieses Gesetzes.

Zieht man nämlich von dem Rande der Farbentafel, d. h. von einer Stelle, an der sich eine möglichst gesättigte Farbe irgend eines bestimmten Tones befindet, eine Gerade nach dem weissen Centrum der Tafel, so liegen auf dieser Geraden alle Farben, welche sich durch Mischung der betreffenden gesättigten Farbe mit Weiss herstellen lassen. Man sagt von allen diesen Mischfarben, sie gehörten demselben Farbentone an. Man darf dies jedoch nur im physikalischen Sinne thun, d. h. man darf allenfalls eine solche

V
2
6

1
8
8
5
XUM

Bezeichnung durch Definition festsetzen; vom physiologischen Standpunkte aus, d. h. unter Berücksichtigung des subjectiven Eindrucks ist dies nicht allgemein gültig. Für die Mehrzahl der gesättigten Farben, nämlich für die zwischen Orange und Cyanblau (Türkisenblau) gelegenen des Spectrums erhält man freilich durch Mischung mit Weiss Farben, in welchen man den Ton der betreffenden gesättigten Farbe leicht wieder erkennt, dies gilt jedoch nicht mehr von den an den Enden des Spectrums befindlichen Farben Roth und Violett, ja selbst nicht mehr von Blau. Mischungen dieser Farben mit Weiss führen zu Mischfarben, welche stets etwas nach Purpur hin verschoben erscheinen, sodass man z. B. eine Mischung von Ultramarin und Weiss — ich denke hier natürlich nie an Mischung der Farbstoffe, — stets als blassviolett bezeichnen wird und nicht als blassblau. Durch Mischung von Violett oder Roth mit Weiss aber erzielt man Töne, welche als Blasspurpur erscheinen, beziehungsweise einen entschiedenen Stich ins Rosenrothe zeigen.

Man übersieht dies sehr leicht, wenn man aus dem Scalafernröhrchen eines gewöhnlichen Spectralapparates die Scala herausnimmt und durch eine davor gehaltene passend beleuchtete weisse Fläche ersetzt. Alsdann bemerkt man sofort, dass beide Enden des abgeblassten Spectrums einen Stich ins Purpurne (Rosenrothe) zeigen.

Will man deshalb in der Farbentafel die sämmtlichen Mischfarben, welche dem subjectiven Eindrücke nach dem gleichen Tone angehören, durch Linien verbinden, die sich natürlich alle in dem Punkte des Weissen treffen müssen, so sind diese Linien nur zum Theil gerade, nämlich nur, wenn sie nach den den mittleren Theilen des Spectrums angehörigen Farben führen; je mehr man sich den Grenzen des Spectrums nähert, umsomehr krümmen sie sich, indem sie die concave Seite dem Purpur und dessen Mischungen mit Weiss zuwenden.

Purpur mit seinen blassen Abstufungen nach dem Weiss hin nimmt mithin ein verhältnissmässig grösseres Stück der Farbentafel ein als die übrigen Farbentöne, ein Stück, das etwa eine lanzettförmige Gestalt hat.

Die grosse Bedeutung, welche demnach einer wirklich richtig ausgeführten Farbentafel zukommt, veranlasste mich, nachdem ich die mosaikartige Herstellung mit Hülfe gefärbter Körper aufgeben musste, einen anderen Weg einzuschlagen, um wenigstens in gewissem Sinne das gleiche Ziel zu erreichen.

Der leitende Gedanke war der folgende:

Gesetzt, man habe drei gleichseitige Dreiecke, deren jedes von der Spitze nach der Basis hin abschattirt ist, wie beistehende Figur zeigt, jedoch so, dass in jedem eine andere Ecke als Spitze erscheint. Die Schattirung sei so vorgenommen, dass die Helligkeit der Entfernung von der Basis proportional ist, d. h. dass in der Spitze jeweils das Helligkeitsmaximum, das ich als Einheit nehmen will, herrsche, an der Basis die Helligkeit 0, in halber Höhe die Helligkeit $\frac{1}{2}$ u. s. w.



Fig. 1.

Würde man nun diese drei Dreiecke einfach in Weiss und Schwarz ausgeführt optisch übereinander lagern, was sich z. B. durch Spiegelung an unbelegten Glasplatten erreichen lässt, so müsste das resultirende Dreieck gleichmässig grau erscheinen.

Wäre jedoch das eine der Dreiecke von rothem, das andere von grünem und das dritte von blauem Lichte erleuchtet, so müsste man durch Uebereinanderlagerung das Farbdreieck erhalten, wie es sich eben aus den gewählten Grundfarben bilden lässt.

Dabei entspräche das Bild bei Anwendung der oben genannten Helligkeitsverhältnisse genau den Regeln der Schwerpunktsconstruction, wie sie von Newton aufgestellt wurden, d. h. genau dem Mischungsgesetz.

Die optische Uebereinanderlagerung dreier solcher Dreiecke wurde nun auf folgende Weise erreicht:

Innerhalb eines gleichseitigen Prismas aus schwarzgebeiztem Holze befinden sich drei sehr dünne Spiegelglasplatten ¹⁾, welche um 45° gegen die Axe des Prismas geneigt sind. Die Neigungsebenen unter sich bilden Winkel von 120° , sodass ein in der Axe des Prismas befindliches Auge von jedem der hintereinander liegenden Spiegel eine andere Seite des Prismas gespiegelt sieht. Das Prisma selbst ist an beiden Enden geschlossen, doch befindet sich in der einen Verschlussplatte eine Oeffnung zum Hineinsehen. In diese ist überdies ein Ocularrohr, jedoch ohne Linse eingesteckt, um den Augenort zu fixiren.

Die Gesamtlänge des Prismas beträgt bei meinem Apparate 45 cm, die Seitenlänge der dreieckigen Basis 9 cm im Lichten.

Bringt man nun in den Seiten des Prismas dreieckige Oeffnungen an von solcher Grösse und Lage, dass sie nach der Spiegelung an den betreffenden Platten in dem durch das Ocularrohr fixirten Augenorte gleich gross erscheinen und einander decken, so handelt es sich nur noch um passende Beleuchtung der drei Oeffnungen durch farbiges Licht und um entsprechende einseitige Verdunkelung derselben (Abschattirung).

Freilich sieht man nicht sämmtliche dreieckige Oeffnungen gleich deutlich, da sie in verschiedenen Entfernungen zu liegen scheinen, und man nicht gleichzeitig für diese accommodiren kann; doch stört dieser Umstand nicht, da ein dreieckiges Diaphragma, welches sich möglichst nahe vor der dem Beobachter nächstliegenden spiegelnden Platte befindet, das Bild von drei Seiten her ein wenig einschränkt und die Zerstreungsbilder abblendet.

Die Beleuchtung der drei Dreiecke durch farbiges Licht wurde nun auf folgende Weise erzielt:

1) Drei unbelegte Spiegelplatten wurden meines Wissens auch schon einmal von Hrn. E. Albert zur Mischung von drei Farben angewendet, jedoch nicht in der gleichen Weise, überhaupt nicht zur Herstellung des Farblendreiecks.

Vor jeder der drei Oeffnungen befindet sich in einiger Entfernung ein weisser Carton, der unter 45° gegen die entsprechende Prismenfläche geneigt ist, so zwar, dass durch Licht, welches parallel der Axe einfällt, die sämmtlichen weissen Schirme gleich stark beleuchtet werden. Deckt man demnach die Oeffnungen wechselweise zu, sodass immer nur eine frei bleibt, so erblickt man jedesmal ein weisses Dreieck von der nämlichen Helligkeit.

Für den oben näher bezeichneten Zweck hat man aber abschattirte Dreiecke nöthig. Um dies zu erreichen, legte ich immer schmalere Streifen dünnen Pauspapieres übereinander, sodass in jeder der dreieckigen Oeffnungen eine Ecke frei blieb, aber von da ab gegen die gegenüber liegende Grundlinie zu und dieser parallel immer dickere Schichten folgten, bis ganz nahe an dieser Linie ein vollkommen undurchsichtiger Streifen eine totale Abblendung bewirkte.

Hätte man Papier von ganz richtiger Durchsichtigkeit zur Verfügung, so müssten bei richtiger Wahl der Lage der frei bleibenden Ecken die drei Bilder durch Uebereinanderlagerung eine gleichmässig erleuchtete schwach graue Fläche liefern.

Bringt man nun vor die drei Oeffnungen farbige Gläser, so erhält man eine richtige Farbentafel, die um so farbenreicher ist, je glücklicher die Farbentriade gewählt ist.

Man kann also hier bei genügender Auswahl an farbigen Gläsern höchst einfach herausprobiren, welche drei Farben mit meistem Rechte den Anspruch erheben können, als Grundfarben betrachtet zu werden.

Durch die Gefälligkeit des in der Kunstwelt rühmlichst bekannten Glasmalers Hrn. Burkhardt in München befand ich mich in der glücklichen Lage, aus einer sehr reichhaltigen Musterkarte von farbigen Gläsern auswählen zu können.

Das Ergebniss sprach in hervorragendster Weise zu Gunsten der Young-Helmholtz'schen Farbentriade.

Ein rothes Ueberfangglas, das nach meiner oben erwähnten Vergleichsmethode einem Tone zwischen *B* und *C* nahe bei *C* des Spectrums entsprach, ein grünes Glas von einem Tone zwischen *b* und *E* und eine blaues Cobaltglas,

welches in der Gegend von *G* nach der blauen Seite hin zu stehen kam, lieferten eine äusserst vollständige Farbentafel¹⁾, während bei der Wahl der zwischenliegenden Töne: Purpur, Gelb und Türkisenblau das Ergebniss ein geradezu klägliches ist.

Auch Roth, Blau und Gelb gibt, wie schon Hr. von Helmholtz aus seinen Versuchen folgerte, eine arme Farbentafel, in der das Grün mit den benachbarten Abstufungen vollkommen mangelt.

Man besitzt demnach in dem eben beschriebenen Apparat ein ungemein einfaches Mittel zur Orientirung über die sogenannten Grundfarben.

Zugleich aber lassen sich, wie schon angedeutet, noch sehr verschiedene andere Verhältnisse leicht übersehen.

Es wurde oben bemerkt, dass zur Erzielung einer Farbentafel, welche den Bedingungen des Schwerpunktsatzes entspricht, die Abschattirung so vorgenommen werden müsste, dass nach Entfernung der farbigen Gläser das durch Ueber-einanderlagerung der drei Bilder erhaltene Dreieck vollkommen gleichförmig weiss erscheine. Diese Bedingung ist mit dem von mir angewendeten Hülfsmittel nur schwer erfüllbar und führt sogar, wenn man sich ihr zu nähern sucht, zu einem Resultate, das man vielleicht nicht erwartet hat.

Die Farbentafel wird nämlich in diesem Falle nicht so reich, als wenn man in gewissem Sinne von der erwähnten Bedingung abweicht.

Unter der Erfüllung dieser Bedingung treten nämlich die gewählten Grundfarben im Innern des Dreiecks nur mit Bruchtheilen ihres Gewichtes auf, im Schwerpunkte jede nur mit ein Drittel. In diesem Falle aber fehlt sowohl richtiges Weiss als gesättigtes Gelb.

1) Diese drei Töne entsprechen demnach genau jenen Stellen des Spectrums, an welchen ich in der Abhandlung „über das Gesetz der Farbenmischung“ aus theoretischen Gründen die Grundfarben glaubte suchen zu müssen. Ich war über diese Uebereinstimmung selbst sehr erstaunt, da ich die Auswahl der drei Gläser und die Bestimmung ihrer Farbtöne traf, ohne mich von jenen theoretischen Betrachtungen, an die ich mich kaum mehr erinnerte, irgendwie beeinflussen zu lassen.

Diese beiden letzteren Empfindungen hat man nur, wenn die einzelnen Componenten mit vollem Gewichte in die Mischung eintreten, d. h. wenn die Mischung heller ist als jede der Componenten.

Es bedarf eben jede bestimmte Farbe einer ganz bestimmten Helligkeit, um ihren specifischen Eindruck voll zur Geltung zu bringen, d. h. um gesättigt zu erscheinen.¹⁾

Gerade dies war der Grund, weshalb ich schon früher vorgeschlagen habe, hinsichtlich der Sättigung von der Helmholtz'schen Definition abzuweichen, und der geringeren oder grösseren Beimischung von Weiss, welche Hr. v. Helmholtz als „Sättigungsgrad“ bezeichnet, lieber die Bezeichnung der „Reinheit“ zu geben, eine Definition, nach welcher die Spectralfarben zwar sämmtlich als reine Farben zu bezeichnen sind, aber nur dann als gesättigte, wenn sie eben die richtige Helligkeit besitzen.

Die Sättigung ist nach dieser Auffassung wesentlich physiologischer, die Reinheit aber rein physikalischer Natur.

In wie eigenthümlicher Weise der Eindruck der Sättigung von der Helligkeit abhängt, und wie eigenartig wir andererseits die Helligkeit beurtheilen, dies lässt sich mit Hülfe des beschriebenen Apparates, und zwar sogar bei besonderer Vereinfachung desselben leicht übersehen.

Wendet man nämlich an den drei Oeffnungen einfach dunkle Schirme in der Art an, dass in jedem der drei Dreiecke an einer Seite ein Streifen bis auf ein Viertel der Höhe vollständig abgeblendet wird, während die gegenüberliegende Ecke bis über den Mittelpunkt des Dreieckes ganz frei bleibt, so erhält man ein Bild wie Fig. 2, in welchem die Ecken von den drei Grundfarben, die zwischenliegenden trapezförmigen Stücke von den Mischfarben zu zweien eingenommen werden, die Mitte dagegen die Mischfarbe der drei gewählten Grundfarben liefert.

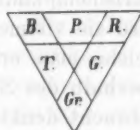


Fig. 2.

Diese Mischfarben sind bei Anwendung der oben ange-

1) Vgl. E. Albert, Wied. Ann. 16. p. 129—160. 1882.

führten den Young-Helmholtz'schen Grundfarben möglichst nahe kommenden Gläser: Gelb, Türkisenblau¹⁾ und Purpur, und zwar hat jedes die physikalische Helligkeit gleich der Summe der beiden Componenten.

Dabei erscheint jedoch bei genügender Gesamthelligkeit das Gelb sehr satt, aber nicht besonders hell, nur wenig heller als die beiden Rauten, welche die Componenten zeigen, Türkisenblau und Purpur dagegen blass und erheblich heller als die beiden Componenten.

Das mittlere Dreieck erscheint bei richtiger Stellung der weissen Cartons weisslich, zur Erzielung von recht intensivem Weiss müsste die Helligkeit jedoch noch grösser sein, als sie durch die Summe der Componenten erhalten wird.

Will man satteres Purpur erhalten, so muss man die Gesamthelligkeit so herabstimmen, dass nur mehr bräunliches Gelb erscheint.

Bis zu einem gewissen Grade erhöht eine verminderte Helligkeit auch die Sättigung des Türkisenblau, doch bleibt letzteres immer ziemlich blass, wie man ja auch unter allen existirenden farbigen Körpern vergeblich nach einem Repräsentanten sucht, der diesen Ton satt wiedergibt, und wie selbst im Spectrum die Gegend um *F* immer einen minder gesättigten Eindruck macht.

Aus diesen Versuchen geht hervor, dass bei Ausführung der Farbentafel nach dem Grundsatz, dass die mittlere Helligkeit überall die gleiche sei²⁾, unmöglich alle gesättigten Farbenempfindungen in derselben vorkommen können, man wird sie vielmehr nur in der Pyramide unterbringen können, welche man erhält, wenn man sich in einiger Entfernung, oberhalb des Schwerpunktes des Dreieckes das Schwarz angebracht denkt und durch diesen Punkt und die Seiten des Dreieckes Ebenen legt. Die gesättigten Farben werden alsdann auf krummen Linien liegen, wobei die das Gelb ent-

1) Ich wähle gern die Bezeichnung Türkisenblau anstatt Cyanblau, weil sie allgemeiner verstanden wird.

2) Immer vorausgesetzt, dass die Helligkeit der drei Grundfarben die gleiche sei, was natürlich eine mehr oder minder willkürliche Annahme in sich schliesst.

haltende die concave, die beiden anderen aber die convexe Seite der schwarzen Spitze zukehren.

Dies sind die wesentlichsten Resultate, welche sich mit dem Apparat in der gegenwärtigen Form erzielen lassen, abgesehen von seiner Bedeutung als Demonstrationsapparat, die nicht zu unterschätzen sein dürfte, besonders da man durch einfaches Decken der einen oder anderen Oeffnung sofort die Farbentafel eines Farbenblinden erhalten kann.

Ich zweifle nicht, dass der Apparat noch grosser Vervollkommnung fähig ist, und habe deshalb auch unterlassen, eine Abbildung davon zu geben, wie ich überhaupt mit der Veröffentlichung gezögert hätte, wenn ich nicht wegen Uebernahme anderweitiger Verpflichtungen befürchten müsste, wenn überhaupt je, so doch erst nach Jahren, den Gegenstand wieder aufnehmen zu können.

Als Mangel desselben erscheint mir erstens die Schwierigkeit, vollkommen gleich starke Beleuchtung der drei weissen Cartons zu erzielen; auch die gesetzmässige Abschattirung der drei Bilder lässt sich auf die angegebene Weise nur annäherungsweise erreichen, und würden keilförmig geschliffene Rauchgläser in dieser Hinsicht wohl viel Vorzüglicheres leisten.

Alle diese Mängel hoffe ich zu beseitigen durch eine vollständig andere Methode der Uebereinanderlagerung der drei Bilder, und zwar durch Anwendung einer sehr stumpfen dreikantigen Pyramide aus Glas mit ebener Basis.

Eine solche Pyramide, deren Seitenflächen mit der Grundfläche nur Winkel von wenigen Graden bilden, liefert bei senkrechtem Aufblicke auf die Grundfläche oder auf die Spitze drei Bilder eines dahinter gelegenen Gegenstandes.

Bringt man nun in einem dunklen Schirme drei dreieckige Oeffnungen von gleicher Grösse an, so sieht man neun Bilder, von denen man bei passender Entfernung vom Schirme die drei mittleren zur Deckung bringen kann.

Setzt man alsdann vor diese Oeffnungen drei gleiche keilförmig geschliffene Rauchgläser und ausserdem die oben erwähnten farbigen Gläser (oder in diesem Falle auch farbige Flüssigkeiten), so muss sich die Herstellung der Farbentafel in viel vollkommenerer Weise verwirklichen lassen.

V
2
6

1
8
8
5
XUM

Da sich überdies die genannte Pyramide innerhalb eines Fernrohres anbringen lässt, so muss es möglich sein, mit kleineren Dimensionen der Oeffnungen dasselbe Ziel zu erreichen wie oben. Desgleichen muss man auch im Stande sein, mit diesem Hilfsmittel unter passender Verwendung von Linsen die Tafel auf eine weisse Fläche zu projeciren. Es wäre bei Anwendung dieser Pyramide sogar die Benutzung von Spectralfarben zur Beleuchtung der drei Oeffnungen nicht ausgeschlossen.

Da es mir, wie schon bemerkt, kaum möglich sein wird, die Sache selbst weiter zu verfolgen, so wollte ich wenigstens meinen Plan nicht unterdrücken, um vielleicht den einen oder anderen Forscher zur Fortsetzung der Arbeit anzuregen.

Es handelt sich dabei natürlich nur um einen Ausbau ins Einzelne. Die Hauptergebnisse lassen sich jedoch auch mit dem bisher benutzten Apparate übersehen und gipfeln in einer unleugbaren Bestätigung der Young-Helmholtz'schen Theorie.

Dabei erblicke ich das Wesen dieser Theorie in der Annahme, dass es drei physiologische Grundfarben oder Grundempfindungen gibt, und dass diese dem Roth, Grün und einem dem Violetten nahestehenden Blau entsprechen.

Zugleich scheint mir der Ausbau dieses Grundgedankens sehr wohl eine Annäherung an die Hering'sche Auffassung zu gestatten, ohne dass man deshalb genöthigt wäre, dieselbe mit allen ihren Einzelheiten und theilweise sehr kühnen Voraussetzungen und Folgerungen anzunehmen.

Eine solche Annäherung ist aber seit der Entdeckung des Sehpurpurs und des Optogramms beinahe geboten, und ist es wohl nur der Rücksicht auf diese Verhältnisse zu danken, dass Hering's Theorie überhaupt Anhänger finden konnte.

Diese Theorie stützt sich bekanntlich auf die Annahme, dass in der Netzhaut Zersetzungen und Wiederbildungen, oder wie Hering sagt, Dissimilationen und Assimilationen eintreten, die alsdann erst ihre Wirkungen auf die Nervenendigungen äussern.

Bei der Verfolgung dieses Grundgedankens kommt jedoch Hering zu einer weiteren Annahme, welche ich für durchaus irrhümlich halten möchte.

Hering betrachtet nämlich diese beiden Vorgänge, nämlich die Dissimilation und Assimilation, wenn auch dem Sinne nach entgegengesetzt, so doch in der Intensität ihrer Wirkung auf die Nerven als vollkommen gleichwerthig, so dass er bei den von ihm angenommenen Grundempfindungen des Blau-Gelb und Roth-Grün¹⁾ sogar die Frage offen lässt, welche Farbenempfindung in jedem der Paare der Dissimilation, und welche der Assimilation entsprechen.

Diese Annahme der Gleichwerthigkeit von Dissimilation und Assimilation entbehrt meines Erachtens nicht nur jeder Analogie in den übrigen physiologischen Vorgängen, sondern führt auch gerade in der Lehre von der Lichtempfindung Folgerungen ein, die mit den Thatfachen schwer vereinbar sind.

Weit natürlicher gestaltet es sich meines Erachtens, wenn man die Annahme macht: Auf der Netzhaut befinden sich Substanzen, welche durch den Einfluss des Lichtes zersetzt werden (Dissimilation), und welche sich in der Dunkelheit oder unter dem Einfluss schwachen oder andersfarbigen Lichtes allmählich wieder bilden (Assimilation).

Die Zersetzung erfolgt um so reichlicher und rascher, je intensiver das wirkende Licht ist, die Neubildung immer nur allmählich. Es kann sich deshalb auch die Empfindung der durch das Licht hervorgerufenen Zersetzungen (die objective Lichtempfindung)

1) Dass nicht Roth, sondern Purpur die Ergänzungsfarbe von Grün ist, dies mag nur nebenher erwähnt werden. Freilich fällt damit auch eine der Hauptstützen, welche Hering gerade für die Wahl dieser Paare anführt, nämlich dass die vier Componenten lauter Farben sein sollen, welche der „unbefangene Beobachter“ als einfache angibt. Vom Purpur kann man dies gewiss nicht behaupten, da die Bezeichnung dieser Töne im allgemeinen eine unsichere ist, und man nicht selten den Purpur als ein bläuliches Roth bezeichnen hört, wollte man aber Roth in dem genannten Paare festhalten, dann müsste man als Ergänzungsfarbe „Blau-grün“ wählen, das schon durch seinen Namen verräth, dass es der oben genannten Bedingung nicht entspricht.

ausserordentlich hoch, ja bis zum Schmerze steigern, während die Wiederbildung nur zu viel schwächeren Reizen Veranlassung gibt.

Analoge für diese Auffassung sind leicht und reichlich zu finden. In allen Organen kann durch gewaltige Anstrengung oder sehr starke Reize rasche Ermüdung eintreten, Ermüdung, die ja z. B. beim Muskel auch nichts anderes als Folge von Zersetzungen ist, während die Erholung, d. h. die Wiederbildung immer nur langsam von statten geht und sich nie über eine enggezogene Grenze hinaus beschleunigen lässt.

Dabei kann leichte oder veränderte Inanspruchnahme die Erholung des ermüdeten Organes rascher fördern, als vollständige Ruhe, wie dies insbesondere bei der Gehirnthätigkeit der Fall ist, wo Abwechselung, sogenannte Zerstreuung, oft am allgünstigsten wirkt.

Das eigenthümliche Verhalten grauer Flächen bei Contrastversuchen scheint darauf hinzuweisen, dass auf der Netzhaut ähnliche Verhältnisse obwalten.

Präcisirt man die eben in den Hauptzügen entworfenen Anschauungen dahin, dass man annimmt, es seien auf der Netzhaut drei Substanzen vorhanden, von denen die eine vorzugsweise durch rothes, die andere durch grünes und die dritte durch blaues Licht zersetzt werde, während Einwirkung anders farbigen Lichtes eben eine gleichzeitige Zersetzung von zwei oder drei der genannten Substanzen bewirkt und dadurch auch zu Wahrnehmungen Veranlassung gibt, welche sich von jenen der Grundfarben mehr oder weniger entfernen, so erklärt sich daraus das Farbenmischungsgesetz genau ebenso wie nach der Young-Helmholtz'schen Hypothese. Zugleich aber bietet diese Formulirung Vorthelle bei Erklärung der Irradiation, des simultanen und nachfolgenden Contrastes.

Hat man z. B. eine begrenzte weisse Fläche stark fixirt, und blickt man dann auf eine graue, so geht anfangs gleich nach dem Aufhören des Reizes die Zersetzung noch fort, man hat ein positives Nachbild. Bald hat aber diese ihr Ende erreicht, und nun scheint die Stelle dunkler, weil das Licht hier weniger Stoff zur Zersetzung mehr vorfindet, als in der

Nachbarschaft. Blickt man dagegen auf eine schwarze Fläche, so erscheint die Stelle tiefer schwarz als die Umgebung, weil dort die Wiederbildung lebhafter ist als ringsherum, ähnlich wie man nach der Ermüdung nun auch der Empfindung der Ruhe fähig ist, eine Empfindung, die jedoch nie so positiv auftritt, wie die eines Reizes. Ebenso ist die Empfindung des tief Schwarzen, wie sie durch den angegebenen Versuch sich erzeugen lässt, doch nie so intensiv wie jene des Lichtes sein kann, was einfach aus der Thatsache hervorgeht, dass das Schwarz vielfach gar nicht als Empfindung angesehen wird.

In ähnlicher Weise würde sich der simultane Contrast am Rande einer weissen und schwarzen Fläche erklären.

Die Erscheinungen der Irradiation zwingen nämlich schon zu der Annahme, dass ein Uebergreifen der Zersetzungen von einer gereizten Stelle auf die nicht gereizten, d. h. ein Austausch der Sehsubstanzen stattfindet.

Wird nun ein Netzhautgebiet durch weisses Licht gereizt, während dicht nebenan kein oder nur geringer Reiz erfolgt, so wird von den benachbarten geschützten Stellen unzersetzte Substanz überströmen nach den gereizten, und das weisse Licht wird deshalb an der Grenze stets mehr Substanz zur Zersetzung vorfinden als im Innern einer ausgedehnten weissen Fläche, und daher der scheinbar hellere Rand; ebenso wird auf der geschützten Seite dieses Randes gerade wegen des Abfliessens fortgesetzte stärkere Wiederbildung eintreten müssen, und deshalb die schwarze Fläche am Rande dunkler erscheinen als im Innern.

Die Uebertragung dieser Betrachtungen, welche sich auf den Fall der gleichzeitigen Zersetzung oder Wiederbildung der drei Sehsubstanzen beziehen, auf jene Fälle, wo nur eine oder zwei derselben zersetzt oder wiedergebildet werden, d. h. auf die Fälle des farbigen Contrastes, scheint so einfach, dass sie jeder leicht selbst machen kann.

Vor allem aber dürfte diese Auffassung geeignet sein, die Eigenthümlichkeiten zu erklären, welche eigentliche Blendungsbilder zeigen, jenachdem man abwechselnd den Blick auf hellere oder dunklere Flächen richtet. Das farbige Ab-

klingen der Nachbilder dürfte sich hierbei aus dem Umstande erklären, dass Zersetzung und Neubildung der drei hypothetischen Substanzen ungleich rasch von statten geht.

Selbstverständlich gehen alle diese Erklärungen im Grunde genommen auf dasselbe hinaus, wie jene, welche die sogenannte Ermüdung zu Hülfe nehmen, ist doch die Annahme von der Zersetzung bestimmter Substanzen unter dem Einflusse eines Reizes und der Neubildung nach dem Aufhören desselben eigentlich nichts anderes, als eine bestimmte Vorstellung von den Vorgängen der Ermüdung und Erholung.

Ob man neben der Annahme von den drei den Grundfarben entsprechenden Sehsubstanzen nun auch noch dreierlei Arten Nervenfasern annehmen muss, von denen jede nur für die Zersetzung einer dieser Substanzen empfänglich ist, oder ob es denkbar ist, dass durch verschiedenartige Reizung der Nervenendigungen ein und derselben Faser die drei verschiedenartigen Empfindungen vermittelt werden; dies ist eine Frage, welche das Grundprincip der specifischen Sinnesenergien so nahe berührt, dass ich sie lieber offen lassen möchte.

Eine mehr ins Einzelne gehende Verfolgung der zuletzt gemachten Andeutungen würde hier viel zu weit führen, habe ich doch den durch die Ueberschrift dieses Aufsatzes gegebenen Rahmen ohnehin schon beträchtlich überschritten.

Es schien mir jedoch wichtig, darzulegen, dass die Eingangs beschriebenen Versuche mit einer durch wahre Farbmischung dargestellten Farbentafel durchaus zu Gunsten der Young-Helmholtz'schen Theorie ausfallen.

Nicht minder wichtig aber schien es mir, nachzuweisen, dass diese Theorie ihrem innersten Wesen nach sehr wohl vereinbar ist mit der Annahme von Sehsubstanzen, welche durch die Einwirkung des Lichtes zersetzt werden, und dass man sie sehr wohl jenen Vorstellungen anpassen kann, zu welchen man durch die Entdeckungen von Boll und Kühne beinahe gezwungen ist.

IV. *Nachträgliche Bemerkung zu der Abhandlung
„Ueber Strömungsfiguren in Flüssigkeiten“;
von Wilhelm von Bezold.¹⁾*

Erst längere Zeit nach Veröffentlichung der oben genannten Abhandlung wurde ich darauf aufmerksam gemacht, dass Hr. Tito Martini schon im Jahre 1877 ähnliche Versuche beschrieben habe.²⁾

Bei dem Nachlesen der Arbeiten des Hrn. Martini überzeugte ich mich, dass dieselben thatsächlich mit meinen Versuchen eine gewisse Aehnlichkeit zeigen, sodass ich sicher nicht versäumt hätte, derselben Erwähnung zu thun, wenn auch die Verwandtschaft zwischen den von uns beiden beschriebenen Versuchen nur eine sehr lose ist.

Diese Verwandtschaft besteht nämlich einzig und allein darin, dass auch Hr. Martini Diffusionsvorgänge in Flüssigkeiten durch passende Färbung der einen der dabei benutzten Flüssigkeiten sichtbar gemacht und dabei Figuren erhalten hat, welche, wenn auch ziemlich entfernt, an einzelne der von mir beschriebenen erinnern.

Dabei beschränkte sich jedoch Hr. Martini ganz im Einklange mit dem Titel seiner Abhandlung wirklich nur auf Diffusionsversuche im engeren Sinne des Wortes.

Von den Strömungen, wie sie durch Temperaturdifferenzen hervorgerufen und durch geeignete Färbung mitgerissener, nebenher freilich auch diffundirender Flüssigkeiten hervorgerufen werden, ist in den Abhandlungen des Hrn. Martini keine Rede.

Gerade diese Vorgänge bilden aber den Kern meiner Untersuchung, sodass die Berührungspunkte zwischen den beiderseitigen Arbeiten nur sehr schwache sind, und deshalb

1) W. v. Bezold, Wied. Ann. 24. p. 569. 1885.

2) Tito Martini, Nuov. Cim. (3a) 9. p. 156—162. 1881. Desgl. in Nature. 17. p. 87—80. Die „Rivista scientifico-industriale“, anno 1877, in welcher Hr. Martini die erste auf diesen Gegenstand bezügliche Abhandlung veröffentlicht hat, ist mir nicht zugänglich.

die Bemerkung genügen wird, dass die Citation der Abhandlung des Hrn. Martini nicht absichtlich unterblieb.

Bei dieser Gelegenheit will ich jedoch nicht versäumen, noch eines kleinen Experiments Erwähnung zu thun, welches ich vor kurzem angestellt habe, und das mir als Vorlesungsversuch gewisses Interesse zu besitzen scheint.

Es handelt sich dabei um einen einfachen Nachweis des Satzes, dass Körper, welche Strahlen lebhafter absorbiren, sich unter dem Einflusse derselben auch stärker erwärmen, als andere, welche bei sonst gleichen Eigenschaften ein geringeres Absorptionsvermögen besitzen.

Dies lässt sich unter Benutzung der in der Abhandlung über Strömungsfiguren erwähnten Flüssigkeit recht leicht und hübsch sichtbar machen.

Man sende nämlich mit Hülfe eines Heliostaten Sonnenlicht in horizontaler Richtung in einen Raum und concentriere die einfallenden Strahlen durch eine Sammellinse in der Art, dass die Spitze des Strahlenkegels etwa in halber Höhe in das Innere eines mit kaltem Wasser gefüllten Glases fällt. Gibt man alsdann Probestoffigkeiten in der Weise auf, dass einer der absteigenden Aeste sich dem Brennpunkte nähert, so verwandelt sich die absteigende Bewegung in eine aufsteigende, sowie die farbige Flüssigkeit in den Strahlenkegel eintritt.

Dies zeigt, dass die Erwärmung des klaren, ungefärbten Wassers in dem Brennpunkte nicht stark genug ist, um wenigstens bei richtiger Temperatur des Wassers der im allgemeinen herrschenden Strömung entgegenzuwirken, während dies in den dunkel gefärbten, stark absorbirenden Theilen der flüssigen Masse sofort der Fall ist.

V. *Die Dissociation wasserhaltiger Salze und daraus abgeleitete Folgerungen über die Constitution der Salzbestandtheile; von W. Müller-Erzbach.¹⁾*

Nach der von mir im 23. Bd. dieser Ann., p. 607 beschriebenen Methode habe ich für eine grössere Zahl von wasserhaltigen Salzen die Dampfspannung bestimmt. Werden bei diesen Bestimmungen die von mir empfohlenen²⁾ Vorsichtsmaassregeln beachtet, so können sie die Genauigkeit barometrischer Messungen erreichen. Die so über die Dissociationsspannung fester Körper gewonnenen Resultate stimmen untereinander meist so vollständig überein wie die Spannungsbeobachtungen bei verdunstenden Flüssigkeiten, und deshalb ist die neue Methode ein geeignetes Hilfsmittel geworden, um aus der Dissociation wasserhaltiger Salze über die Constitution des gebundenen Wassers Aufschlüsse zu erhalten, die theilweise früheren Versuchsergebnissen entsprechen, theilweise aber auch bisher unbekannt waren. Da die Beobachtung der Salze in der Barometerröhre wiederholt und namentlich nach den eingehenden Versuchen von Naumann³⁾ als unzuverlässig für die Ermittlung des Dampfdruckes erkannt ist, so konnte die absolute Grösse der Dissociationsspannung bis jetzt nur nach der hier angewandten relativen Verdampfungsgeschwindigkeit der Salze gegen reines Wasser bestimmt werden. Selbst die Thatsache, dass bei gleichbleibender Temperatur die Dampfspannung der Salze eine unveränderliche ist, war vorher nicht festgestellt worden, ja auf Grund der sorgfältigen und zahlreichen barometrischen Messungen wurde sogar die Möglichkeit einer solchen Feststellung stark bestritten.

Unter der ziemlich grossen Zahl der bis jetzt untersuchten Salze zeigte sich nur in einem Falle bei einer Art

1) Im Auszug Ber. d. Berl. Acad. 1885. p. 371.

2) W. Müller-Erzbach, Wied. Ann. 25. p. 358. 1885.

3) A. Naumann, Chem. Ber. 7. p. 1573. 1874.

von Boraxkrystallen, die aus wässriger Lösung ausgeschieden waren, eine bemerkenswerthe Ausnahme von der Gleichmässigkeit der Spannung. Der unter der Einwirkung von Wasserdampf gebildete Borax zeigte sie überhaupt nicht, und seine Spannung blieb ebenfalls andauernd constant. Während der fortschreitenden Zerlegung der Salze hielt sich die Spannung nun entweder unverändert, bis alles Wasser verdunstet war, oder sie wurde von bestimmten Zusammensetzungen an sprunghaft eine schwächere, die dann wieder gleichmässig blieb. Die Versuche führten deshalb unmittelbar und meist recht auffallend an diejenige Grenzen, an welchen der Uebergang von den zurückgebliebenen einfachen zu den ursprünglichen weniger einfachen Moleculen stattfindet. Bei früheren Zerlegungsversuchen, die namentlich Graham¹⁾ in grosser Zahl und mit vieler Sorgfalt ausgeführt hat, ist häufig erhöhte Temperatur und meist unter Abkürzung der Versuchsdauer das Vacuum zur Zersetzung mitbenutzt, die schwächeren Spannungen der zurückbleibenden Salze sind nicht weiter beachtet und wahrscheinlich als verschwindend klein angesehen.

Nach den bereits publicirten Resultaten²⁾ betrug für eine Temperatur von 15° mit Abrechnung des Gegendruckes beim phosphorsauren Natron $\text{Na}_2\text{HPO}_4 + 12\text{H}_2\text{O}$ für die fünf letzten Wassermoleculé die Spannung 8,8 mm, für die folgenden fünf Moleculé blieb sie andauernd 5,8 mm und fiel dann beim Entweichen des letzten Wassers auf den abermal constanten Werth von 1,6 mm. Die direct gefundenen Zahlen für das Verhältniss der Spannung des im Salze gebundenen Wassers zu der des freien Wassers gaben ohne Correctur die Werthe 0,67—0,41 und 0,05, und diese Werthe der relativen Spannung sind schon vollständig ausreichend, um den grossen Unterschied im Verhalten der drei Salze mit 12, 7 und 2 Mol. Wasser deutlich zu machen. Da die relative Spannung ausserdem auf den Grad der Anziehung des gebundenen Wassers hinweist, so sollen die nachstehenden An-

1) Graham, Pogg. Ann. 38. p. 132. 1836.

2) W. Müller-Erbach, Wied. Ann. 23. p. 616. 1884.

gaben nur die unmittelbar gefundenen relativen Spannungen enthalten, und weil diese mit zunehmender Temperatur wachsen, so ist zugleich für möglichst viele Fälle eine Temperatur von 15° festgehalten worden. Die nähere Untersuchung über die Aenderung der Spannung mit wachsender Temperatur behalte ich mir noch vor. Für die Beurtheilung der Resultate ist ausserdem zu beachten, dass meine Versuche fast regelmässig, besonders aber bei entstehendem Zweifel wegen der Zuverlässigkeit des Ergebnisses noch einmal mit solchen Salzen wiederholt wurden, die aus wasserfreien oder wasserärmeren Verbindungen und dem Wasserdampf feucht gehaltener Luft zurückgebildet waren. Zunächst wurden an die erwähnten früheren Versuche die über schwefelsaure Salze mit 7 und mit 5 Mol. Wasser angeschlossen, und diese Reihenfolge ist auch in der nachstehenden Mittheilung festgehalten.

Magnesiumsulfat. $\text{MgSO}_4 + 7\text{H}_2\text{O}$.

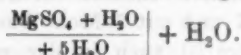
In einer der mit dem gewöhnlichen rhombischen Bittersalz ausgeführten Versuchsreihe habe ich die nachstehenden Resultate erhalten.

Gewicht des Salzes	Gewicht des Krystallwassers	Mittlere Temp. (annähernd)	Gewichtsverlust des Salzes	Gewichtsverl. des unverbundenen Wassers	Relative Spannung
1,499 g	0,768 g	$17^{\circ} \frac{0}{4}$	6 mg	22 mg	0,27
		$18 \frac{1}{2}$	9	29	0,31
		18	13	$38 \frac{1}{2}$	0,34
		19	9	30	0,31
		18	19	61	0,31
		17	29	101	0,29
		$17 \frac{1}{2}$	17	61	0,28
		17	8	40	0,20
		$16 \frac{1}{2}$	0	23	0
		16	$1 \frac{1}{2}$	59	0,025
		16	$\frac{1}{2}$	81	0,006
		17	2	126	0,016
			110 mg oder genau 1 Mol.		

Anfangs ist, wie später näher erörtert wird, die Spannung etwas geringer, sie steigt dann bei 18° auf $0,34^{\circ}$ und nimmt schliesslich wegen der zunehmenden Entfernung der

zersetzten Salztheile von der Oeffnung der Röhre etwas ab, um dann an der Grenze des sechsten Wassermolecüls eine mehr als fünfzehnfache Verminderung zu erfahren.

Auf dasselbe Magnesiumsulfat $\text{MgSO}_4 + 6\text{H}_2\text{O}$ war E. Wiedemann¹⁾ aus der Volumveränderung des Salzes bei 93° geführt worden und auch Mitscherlich und Haidinger hatten es dargestellt. Nach Mulder verliert das Bittersalz an trockener Luft bis $\frac{1}{67}$ seines Wassers, er hatte es also auch bei schwächerer Spannung noch etwas weiter zersetzt. Da nun nach Graham's Beobachtung das erste Molecül Wasser wesentlich fester gebunden ist als die übrigen und erst bei 110° verdampft, so kann das Verhalten des Salzes durch folgende Zusammensetzungsformel ausgedrückt werden:



Doch sind wahrscheinlich die 5 Mol. Wasser der zweiten Verbindungsstufe ebenfalls noch nicht gleichwerthig, sie erleiden eine langsame Dissociation, deren Endresultat bis jetzt nicht festgestellt werden konnte. Nach den bisherigen Beobachtungen scheint die Dampfspannung an der Grenze der Verbindung $\text{MgSO}_4 + 4\text{H}_2\text{O}$ von neuem stark abzunehmen und eine minimale zu werden. Nimmt man den Durchschnitt aus den sieben ersten Versuchen, für welche ausreichend Krystallwasser vorhanden war, so erhält man die relative Spannung 0,30 für 18° . Das Bittersalz kann daher nur verwitern, wenn der Feuchtigkeitsgehalt der Luft unter 30 Proc. gesunken ist, und dem entsprechend wird das Salz als ein solches beschrieben¹⁾, welches nur an warmer trockener Luft ein wenig verwitert.

Um die Bedingungen für das Zerfliessen des Salzes kennen zu lernen, bestimmte ich die relative Spannung seiner gesättigten Lösung, und zwar ebenfalls nach der Verdampfungsgeschwindigkeit. Dabei muss man sich vorsehen, dass die sich ausscheidenden Krystalle nicht zu weit in die Versuchsröhre hineinwachsen, weil sonst die durch Capillaranziehung

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 17. p. 561. 1882.

2) Gmelin, 1. Aufl. 2. p. 217. 1853.

gehobene Lösung wegen geringerer Entfernung von der Oeffnung schneller verdunstet. Man erhält meist gut übereinstimmende Resultate, wenn man bei bekanntem Procentgehalt der gesättigten Lösung Salz und Wasser in den erforderlichen Mengen in der Versuchsröhre erwärmt und nachher die abgekühlte Lösung beobachtet. Dabei kann indessen eine der Verdampfung hinderliche Uebersättigung vorkommen, und man muss deshalb nach der Ausscheidung des Salzes jedenfalls den Versuch fortsetzen. War die Lösung übersättigt, so zeigt sich bei der ersten beträchtlichen Ausscheidung des Salzes regelmässig bei den meisten Lösungen die Dampfspannung zu gross und, wie ich annehme, deshalb, weil die freiwerdende Lösungswärme auf längere Zeit die Temperatur der verdunstenden Flüssigkeit erhöht. Auch durch die später fortgesetzte regelmässige Ausscheidung aller sich unter Abkühlung lösenden Krystalle wird anscheinend die Verdampfungs menge des Lösungswassers ein wenig vergrössert.

Für die Lösung von schwefelsaurer Magnesia fand ich nun bei 16° unmittelbar vor dem ersten Ausscheiden von Krystallen die relative Spannung $0,81$, während sie nachher $0,53$ betrug. Die Atmosphäre des Salzes müsste also andauernd mehr als 81 Proc. Feuchtigkeit besitzen, wenn es zerfliessen soll, innerhalb der Procentsätze 30 und 81 lässt sie es weder verwittern noch Feuchtigkeit aufnehmen.

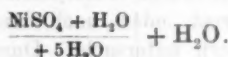
Nickelsulfat. $\text{NiSO}_4 + 7\text{H}_2\text{O}$.

Das Salz wurde durch Umkrystallisiren gereinigt und dann entweder direct oder nach längerem Liegen und schwachem Verwittern untersucht. Durch das Umkrystallisiren war es jedenfalls in die rhombische Form gebracht und an dieser Modification haben schon Brooke und Philipps beobachtet ¹⁾, dass sie an der Luft annähernd 1 Molecul Wasser verliert. Meine Versuche hatten dasselbe Ergebniss.

1) Brooke u. Philipps, Pogg. Ann. 6. p. 193. 1825.

Gewicht des Salzes	Wassergehalt	Temperatur	Gewichtsverlust des Salzes	Gewichtsverl. des unverbundenen Wassers	Relative Spannung
0,2835 g	0,128 g	17°	12 mg	19 mg	0,63
			3½	6	0,58
			2	11½	
			2	37	
			2 1½ 3	162 160 990	0,012 0,008 0,003
0,410 g	0,184 g	20°	19	35	0,54
			6	20	
			1½	21	
			1⅓	126	
			0	308	

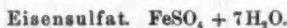
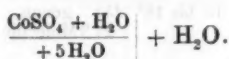
Es entweicht demnach genau ein Molecül Wasser unter einer mittleren Spannung von 0,56. Nun beträgt das Jahresmittel für den Feuchtigkeitsgehalt der Luft beispielsweise hier in Bremen 79 Proc., aber im Sommer ist gegen Mittag überall und im Winter regelmässig im geheizten Zimmer der Procentgehalt beträchtlich kleiner, sodass er leicht unter die Verwitterungsgrenze von 56 Proc. fallen kann. Die bekannte schwache Verwitterung des Salzes steht daher mit der beobachteten Dissociationsspannung in vollständiger Uebereinstimmung. Berücksichtigt man neben den vorstehenden Versuchen wieder die Beobachtung von Graham, dass das erste Molecül Wasser fester gebunden ist und erst über 279° verdampft, so ergibt sich die Formel:



Cobaltsulfat. $\text{CoSO}_4 + 7\text{H}_2\text{O}.$

Gewicht des Salzes	Wassergehalt	Mittlere Temp.	Gewichtsverlust des Salzes	Gewichtsverl. d. unverbund. Wassers	Relative Spannung
0,205 g	0,092 g	16°	16½ Mol. 3½ Wasser 0	20 mg 18 17	0,50

Ebenso verloren 0,411 g über Schwefelsäure 26 mg oder 1 Molecül Wasser bei den relativen Spannungen 0,57 und 0,53, nach der neuen Aufnahme von Wasserdampf 0,53, sodass ich die letztere Spannung als die normale ansehe. Der Rückstand enthielt in beiden Fällen 6 Molecüle Wasser, und diese Verbindung ist auch von Mitscherlich durch Krystallisation der Vitriollösung zwischen 20 und 30°, von Marignac zwischen 40 und 50° beobachtet. Bei 15½° betrug die relative Spannung der gesättigten Vitriollösung 0,90, und die Krystalle des Cobaltvitriols sind deshalb für einen Feuchtigkeitsgehalt der Atmosphäre zwischen 53 und 91 Proc. luftbeständig. Die Zusammensetzungsformel ist der des Nickelsalzes analog:

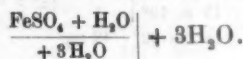


Der gewöhnliche monoklinische Eisenvitriol zeigte nach der Entstehungsart und dem Alter der Krystalle ziemlich starke Abweichungen, die eine grosse Zahl aufklärender Versuche erforderten. Die wichtigsten derselben sind die folgenden.

Gewicht des Salzes	Wassergehalt	Mittlere Temp.	Gewichtsverlust		Relative Spannung
			des Salzes	d. unverb. Wassers	
0,563 g (ältere, gut erhaltene Krystalle)	0,252 g (0,250 g gefunden)	20°	13 mg	25½ mg	0,51
		19	17	34½	0,49
		17½	9	18	0,50
		16½	15½	35	0,44
		17½	24½	56	0,44
		20	24	57	0,42
		17	14	42	0,33
		16½	8½	30	0,28
		16	9	37	0,25
		15½	4½	19	0,24
		zwischen 15 u. 19°	2	128	0,008
		1	1	1195	
0,217 g die zuerst ausgeschiedenen Krystalle des vorigen Salzes nach dem Umkrystallisiren	0,098 g	18 bis 22°	42 mg	92 mg	0,46
			Genau 3 Mol., nicht ½ mg verloren	nachher in 6 Tagen	im Durchschn.

Gewicht des Salzes	Wasser- gehalt	Mittlere Temp.	Gewichtsverlust		Relative Spannung
			des Salzes	d. unverb. Wassers	
0,2445 g durch Al- koh. gefüllt, sehr halt- bar	0,110 g berechnet und gefunden	17°	1 1/2 mg	17 1/2 mg	
		18	9	25	0,36
		18 1/2	9	23 1/2	0,39
		18 1/2	9 1/2	24	0,40
		18	8 1/2	22 1/2	0,38
		17 1/2	7 1/2	21	0,36
		17	3 1/2	25	0,14
0,325 g später aus- geschied. u. grössere Krystalle	0,147 g	22	7	26	0,27
		21 1/2	20	55	0,36
		18	17 1/2	51	0,34
		18	13	40	0,32
		17	5	21	0,24
			0	21	
0,244 g 15 T. nach Ausscheid. d. Kryst.	0,110 g	16 bis 18°	45 genau	155	0,29
			2 3 Moleküle	39	
0,244 g Bis zum Verlust von 87 mg od. von 6 Mol. Wasser erhitzt u. in feuchte Luft gebracht, bis 86 mg wieder auf- genommen sind	0,101 g	16 1/2	5 1/2	18	0,30
		16	5 1/2	18	0,30
		16	5 1/2	18	0,30
		15 1/2	7 1/2	25	0,30
		14	21	69	0,30
		14 1/2	8 1/2	36	0,24
			0	71	

Die älteren Krystalle erfuhren demnach bei grösserer Spannung eine die vier letzten Wassermolecüle umfassende Zersetzung, eine nur wenig geringere Spannung zeigten auch noch die aus jenen durch Umkrystallisation gebildeten und zuerst ausgeschiedenen Krystalle, aber die Zersetzung blieb genau an der Grenze des vierten Wassermolecüls stehen, und ebenso liessen alle anderen Proben von der Spannung 0,29 bis 0,36 oder 0,38 nur die drei letzten Wassermolecüle verdunsten. Besonders nach dem Verhalten des letzten aus Wasserdampf gebildeten Salzes halte ich die Spannung 0,30 für die normale und finde bei der bekannten grösseren Verwandtschaft des ersten Wassermolecüls die Formel:



Regnault hat ebenfalls durch Abdampfen einer Vitriol-
lösung bei 80° die Verbindung mit 4 Molecülen Wasser als

eine festere erkannt. Für die gesättigte Lösung des Eisenvitriols fand sich bei 18° die relative Spannung 0,91.

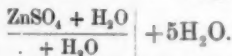
Zinksulfat. $\text{ZnSO}_4 + 7\text{H}_2\text{O}$.

Das gewöhnliche rhombische Salz wurde in den Formen der bei langsamer Ausscheidung entstehenden grösseren Krystalle und der dem Bittersalz gleichen nadelförmigen Krystalle verwandt.

Gewicht des Salzes	Wassergehalt	Mittlere Temp.	Gewichtsverlust		Relative Spannung
			des Salzes	d. unverb. Wassers	
1,156 g grosse Krystalle	0,508 g 1 Molecül = 72 $\frac{1}{7}$ mg	17 $\frac{1}{2}$ °	29 $\frac{1}{2}$ mg	72 mg	0,41
		16 $\frac{1}{2}$	11 $\frac{1}{2}$	35	0,33
		16 $\frac{1}{2}$	25	69	0,35
		16	32 $\frac{1}{2}$	100	0,33
		16 $\frac{1}{2}$	20 $\frac{1}{2}$	70	0,30
		19	58	184	0,32
		20	14	38	0,37
		22	34	96	0,36
		23	17	38	0,35
		22 bis 24°	111	312	0,35
		24	15	52	0,29
		22	29 mg	120 mg	0,24
		21	10	55	0,18
		16 bis 21°	22	1044	0,02
		16 bis 18	0	420	—
		mässig erhitzt	78 im ganzen 507	—	—
0,2875 g kleine Krystalle	0,126 g	18 $\frac{1}{2}$ °	9 $\frac{1}{2}$ mg	25 $\frac{1}{2}$ mg	0,37
		16 $\frac{1}{2}$	13 $\frac{1}{2}$	38	0,35
		16 $\frac{1}{2}$	13 $\frac{1}{2}$	39	0,35
		17	3 $\frac{1}{2}$	26	0,14
		19	16	72	0,22
		23	6	20	0,30
		22	23 $\frac{1}{2}$	79	0,30
		23	7 $\frac{1}{2}$	40	0,19
		21	2 $\frac{1}{2}$	45	0,06
		0 in 31 Tagen	—	—	—
0,1659 g entwässertes Zinkvitriol u. 0,101 g Wasserdampf aus der Luft	0,101 g (0,129 = 7 Moleculen)	17	11 $\frac{1}{2}$	26	0,44
		14 bis 16°	12 $\frac{1}{2}$	28	0,445
		14 bis 19°	14 $\frac{1}{2}$	34	0,43
		14 bis 19°	12	26	0,46
		14 bis 19°	11 $\frac{1}{2}$	27	0,43
		14°	5 $\frac{1}{2}$	15	0,36
		5	—	15	0,33
		4 $\frac{1}{2}$	—	14 $\frac{1}{2}$	0,31
		1 $\frac{1}{2}$	—	14	0,04
		erhitzt	20 od. 1 $\frac{1}{2}$ Mol.	—	—

Wegen der Ungleichheit der Vergleichsrohre mit unverändertem Wasser weniger genau

Der aus feuchter Luft und wasserfreiem Salz gebildete Zinkvitriol besitzt demnach eine etwas grössere Spannung als der aus wässriger Lösung ausgeschiedene, für ersteren beträgt sie 0,44 und für letzteren 0,35. In allen Fällen zeigt sich nach dem Entweichen von 5 Wassermoleculen eine starke Abnahme der Spannung, aber zweimal erstreckt sich die Dissociation noch auf den grössten Theil des sechsten Moleculs, während sie im dritten Falle, bei den nadelförmigen Krystallen, nur ein Drittel davon umfasste. Da auffälligerweise die Zersetzung nicht genau an der Grenze voller Moleculen stehen blieb, so wurde eine neue Probe neben einem grossen Ueberschuss an entwässertem Aetzkali in eine zugeschmolzene Glasröhre abgesperrt und die Röhre nach 8 Monaten erst geöffnet, aber auch jetzt fand sich ein Wasserrückstand von $1\frac{1}{7}$ Moleculen, also nahe mit dem der früheren Versuche übereinstimmend. Graham hat übrigens, wie nachher noch näher anzugeben ist, mit Mangansulfat ähnliche Erfahrungen gemacht. Eine Veränderung der Dissociation hinter dem sechsten Molecul des Krystallwassers, wie es der von Mitscherlich und Marignac über 30° ausgeschiedenen Verbindung $\text{ZnSO}_4 + 6\text{H}_2\text{O}$ entsprechen würde, findet entschieden nicht statt, dagegen fiel bei den dem Bittersalz ähnlichen Krystallen vor dem fünften Molecul die Spannung beträchtlich, während sie nachher allerdings allmählich fast wieder zu der früheren Höhe anstieg. Die von dem siebenfach gewässerten Salze jedenfalls als fester zu unterscheidende Verbindung mit 2 Moleculen Wasser ist von Schindler beim Zerfallen des Zinkvitriols durch Erwärmen auf 50° beobachtet und ebenso von Kühn durch Kochen mit absolutem Alkohol. Kühn erhielt auch durch Erhitzen bis 100° das einfach gewässerte Salz, aber ich darf nicht annehmen, dasselbe ebenfalls abgeschieden zu haben, dazu waren die von mir beobachteten Wasserreste zu gross. Die mit Sicherheit erkannten Unterschiede im Verhalten des Wassers finden demnach in der folgenden Formel ihren Ausdruck:



Die relative Spannung der gesättigten Lösung betrug 0,83 bei 15° .

Die Sulfate mit 7 Moleculen Wasser zerfallen also nach ihrer Dissociation in drei voneinander verschiedene Gruppen, die des Magnesiums, Nickels und Cobalts bilden die erste, die des Eisens und Zinks die zweite und dritte. Trotz der ganz gleichen Gefrierpunktserniedrigungen durch die beiden letzten ist also ihre Constitution doch wesentlich verschieden.

Kupfersulfat. $\text{CuSO}_4 + 5\text{H}_2\text{O}$.

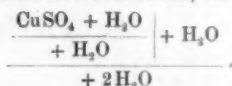
Kupfervitriol zeigt noch auffälliger, als ich früher vom Borax beschrieben habe, das merkwürdige Verhalten einer langsam zu dem normalen Werthe aufsteigenden Dissociationsspannung.

Gewicht des Salzes	Wassergehalt	Mittlere Temp.	Gewichtsverlust		Relative Spannung
			des Salzes	d. unverb. Wassers	
0,131 g fein zerrieben	0,047 g	9 bis 16°	0 in 5 Tagen	—	—
		16 bis 17°	2 mg in den folg. 14 Tagen	—	—
		17 bis 19°	14 mg in d. folg. 24 Tagen	—	—
0,185 g fein zerrieben	0,067 g	14 bis 16°	0 in 4 Tagen		
		16 bis 23°	4 in 17 Tagen	322 mg	0,012
		16½ bis 20°	7	140	0,05
		20 bis 21°	3½	80	0,044
		17°	3½	90	0,04
		16½°	6½	162	0,04
		19°	6 zusammen	158	0,038
			30½ mg = 2¼ M.		
		19 bis 24°	3½	115	0,03
		18 bis 23°	2	1320	0,0015
0,162 g entwässer- ter Kupfer- vitriol	0,091 g od. 5 Mol. Wasser aus feucht. Luft aufgenomm.	17°	3½	39	0,09
		13 bis 18°	3	37	0,08
			3½	46	0,08
			14	154	0,09
			12	160	0,08
			1	154	0,006
			1/3 in 10 Tagen		
			1,2	2940	0,0004

Ein anderer Kupfervitriol, der bei schwächerem Erhitzen 1 Mol. Wasser zurückbehalten und nachher aus feuchter Luft die vier übrigen wieder aufgenommen hatte, zeigte mit dem Salze des letzten Versuches übereinstimmend die relative

Spannung 0,09—0,10 und 0,08. Daher unterliegt es keinem Zweifel, dass die Spannung des regenerirten Kupfersulfats, abweichend von allen bis jetzt untersuchten Salzen, von derjenigen des aus wässriger Lösung ausgeschiedenen gewöhnlichen Salzes ganz erheblich verschieden ist. Letztere kann durchschnittlich zu 0,04 angenommen werden, während die erstere 0,09 beträgt. Aus dieser Thatsache erklären sich ohne weiteres grössere Unregelmässigkeiten, wie sie Naumann aus der barometrischen Messung der Dissociationsspannung von Kupfervitriol mitgetheilt hat.

Nachdem die grössere Spannung erreicht ist, bleibt sie gleichmässig, bis 2 Mol. Wasser verdampft sind, und sie hält sich besonders genau an diese Grenze bei dem aus feuchter Luft regenerirten Salze. Das dritte Mol. Wasser verdampft mit bedeutend geringerer Spannung, die wegen des Gegendruckes der über der benutzten Schwefelsäure restingenden Feuchtigkeit noch genauer bestimmt sein müsste. Nachdem 3 Mol. Wasser verschwunden sind, erfährt die Spannung von neuem eine beträchtliche Verminderung und nimmt den minimalen Werth von 0,0004 an. Da das letzte Wassermolecul allein sich wieder fester gebunden erweist, und nach Graham erst über 221° verdampft, so sind vier Stufen in der Anziehung des Wassers zu unterscheiden, und die Formel heisst:



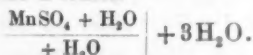
Graham hat an dem bei etwas höherer Temperatur von 19—21° im Vacuum gehaltenen Kupfervitriol ebenfalls einen Rest von fast 2 Mol. Wasser bestimmt. Der Einwirkung einer grösseren Menge von entwässertem Kali in einer zugeschmolzenen Glasröhre ausgesetzt, zeigte er nach mehreren Wochen weisse Streifen, die sich allmählich vergrösserten, und es blieb dabei nach zehn Monaten ein Rückstand von $1\frac{2}{3}$ Mol. Wasser. Bei einer geringeren Menge von mit eingeschlossenem Kali enthielt der Kupfervitriol nach 15 Monaten genau 3 Mol. Wasser, während von dem Aetzkali im ganzen $\frac{5}{6}$ Mol. Wasser aufgenommen waren. Die gesättigte Sulfatlösung hat bei 13° die relative Spannung 0,94.

Mangansulfat. $\text{MnSO}_4 + 5\text{H}_2\text{O}$.

Gewicht des Salzes	Wasser- gehalt	Mittlere Temp.	Gewichtsverlust		Relative Spannung
			des Salzes	d. unverb. Wassers	
0,5355 g etwas ver- wittert	0,200 g (0,195 g gefunden)	16°	11 1/2 mg	18 mg	0,64
		16	8 1/2	14	0,61
		17	14	37	0,40
		17—19	19	37	0,51
		20	22 1/2	42	0,54
		21—23	24 1/2	47	0,52
		24	13 noch 82 od. nahezu 2 Mol. rückständig	25	0,52
		22	18	46	0,39
		22	9	71	0,13
		17—23	3 1/2 1/8 0 in 52 Tagen	549 206	0,006
		beim Erhitzen	51 od. 1 1/4 Mol.		
		Das vorige Salz, nach- dem es entwässert war, und dann 2 2/3 Mol. Wasser aus feuchter Luft aufgenommen hatte	15 1/2	9	14
14—16	6,8		14	0,49	
	15,2		28	0,54	
	7 1/2		26	0,29	
	3		20	0,15	
	— rückständ. 1 1/3 Mol.		35		

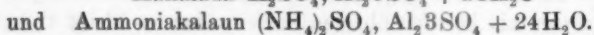
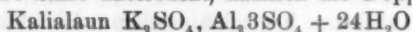
Nachdem eine geringe Menge Wasser mit höherer Spannung verdunstet ist, fällt letztere auf 0,50 bis 0,54, und ich möchte nach dem letzten Versuche 0,52 als dem normalen Werthe am nächsten liegend hinstellen. Die Abweichungen sind grösser als bei den übrigen Salzen, aber es bleibt trotz derselben eine entschiedene Abstufung zwischen dem zweiten und dritten Wassermolecül unverkennbar. Und ebenso unzweifelhaft muss im Gegensatz zum Kupfervitriol das Verhalten und die daraus gefolgerte Anziehung zwischen dem dritten und vierten Molecül als gleichartig angesehen werden. Während in meinen Versuchen Wasserreste von 1¼ und 1⅓ Mol. bestimmt sind, hatte Graham durch Austrocknen im Vacuum bis 22° einen Rückstand von 1⅔ Mol. erhalten. In der zugeschmolzenen Glasröhre liess Aetzkali in acht Monaten bei einem ersten Versuche 1⅓, bei einem zweiten bei etwas höherer Temperatur in zwei Monaten 1⅓ Mol. zurück, während Graham wieder durch Erhitzen an der Luft bis 114° etwas über 1 Mol. im Rückstande gefunden

hat. Die Thatsache muss deshalb als feststehend angesehen werden, dass bei mehreren Salzen innerhalb des einzelnen Wassermolecüls die Dampfspannung sprungweise abnimmt, und dass die Theile solcher Molecüle sich physikalisch ungleichartig erweisen. Vielleicht fällt in diesem Stadium der Zersetzung der ganze Rest der Verbindung in sich zusammen und erfährt dann eine derartige Umlagerung, dass nachher das Wasser fester gebunden ist. Weil nach Graham das letzte Fünftel des Wassers wieder viel schwieriger verdampft, als das übrige, nämlich zwischen 194 und 210°, so ergab sich für Mangansulfat die Formel:



Da sich das Salz nicht wie die übrigen unter starker Abkühlung, sondern unter ganz geringer Wärmeabsonderung in Wasser löst, so war bei der Bestimmung der relativen Spannung der gesättigten Lösung ein störender Einfluss der Lösungswärme nicht vorhanden. Sie erwies sich recht gleichmässig und betrug 0,53 für 15° und 0,84 für eine mittlere Temperatur von beinahe 17°.

Zum Vergleiche wurden noch zwei zusammengesetzte schwefelsaure Salze untersucht, nämlich die Doppelsalze:



Sie zeigten beide geringe und untereinander fast genau übereinstimmende Dissociation, die im Laufe von 65 Tagen bei einer von 14 bis 19° wechselnden Temperatur innerhalb der Werthe von 0,025 bis 0,036 für die relative Spannung schwankte, und also noch schwächer war als beim Kupfervitriol. Bei der Langsamkeit der Zersetzung waren beim Kalialaun trotz der langen Dauer des Versuchs erst 5 Mol. Wasser verdunstet, und von Ammoniakalaun, von dem eine grössere Menge zu dem Versuche verwandt war, noch weniger. Die Grenze einer geringeren Spannungsstufe wurde dabei in keinem Falle erreicht.

Neben der grossen Verschiedenheit in der Constitution der Salze, die sich auf diese Weise durch die genauere Beob-

achtung ihrer Dissociation zu erkennen gibt, erscheint mir ein anderer Umstand von ganz besonderer Bedeutung für die Auffassung über die Anordnung der einzelnen Bestandtheile innerhalb der einheitlichen Gruppen, die wir als Molecüle zu bezeichnen pflegen. Im Laufe der Dissociation zeigte sich nämlich, wie schon erwähnt, ziemlich häufig die merkwürdige Erscheinung, dass beim Uebergang von einer wasserreicheren zu einer Verbindung von geringerem Wassergehalt und geringerer Spannung anfangs tagelang fast gar kein Wasser verdampfte und erst allmählich eine grössere und schliesslich constante Gewichtsabnahme wahrgenommen werden konnte. Mehrere Salze von überhaupt schwacher Dissociationsspannung verhielten sich bei der ersten Einwirkung der trockenen Atmosphäre ganz ähnlich und deshalb erkläre ich mir jenen Stillstand bei dem Uebergange zu einem schwerer zersetzbaren Complexe dadurch, dass das zuerst abgegebene Wasser diesem Complexe in einem gewissen Grade getrennt gegenübersteht. Anfangs reagirt das loser gebundene Wasser für sich allein auf den äusseren Feuchtigkeitsdruck in dem das Salz umgebenden Raume, ist dieses erste Wasser dann verschwunden, so lockert sich allmählich durch die innere Dampfspannung, die nun keinen Gegendruck mehr findet, in allen Molecülen die Festigkeit der rückständigen Verbindung, und so entsteht schliesslich von neuem ein gleichmässiger Dampfdruck. Man hat also nach dieser Auffassung innerhalb der einzelnen Molecüle von manchen Salzen getrennt wirksame Complexe von Wasser und von wasserhaltigem Salz anzunehmen. Das bezügliche Verhalten fiel unter den von mir untersuchten Verbindungen an folgenden besonders auf: am phosphorsauren Natron, Borax, an dem durch Alkohol ausgeschiedenen Eisenvitriol, am Zinkvitriol, Kupfervitriol, Chlorcalcium, Chlormagnesium und Chlorbarium. Als eine vereinzelt vorkommende Ausnahme kann man demnach die Erscheinung entschieden nicht ansehen, und es verdiente näher geprüft zu werden, ob vielleicht eine Veränderung des Volumens mit jenem Vorgang verbunden ist.

VI. Ueber die Inconstanz der Dämpfungsfuction eines Galvanometers und ihren Einfluss auf die absolute Widerstandsbestimmung mit dem Erd-inductor; von F. Kohlrausch.

Es wurde neulich die Behauptung aufgestellt¹⁾, dass meine alte absolute Widerstandsbestimmung²⁾ wegen eines von mir irrthümlich geschätzten Einflusses einen „erheblichen Fehler“ enthalte. Ehe ich diese Bemerkung widerlege, bemerke ich zur Uebersicht folgendes:

Bei Gelegenheit der genannten Arbeit hatte ich an dem von mir angewandten Galvanometer auch die Abhängigkeit des Dämpfungsverhältnisses von der Schwingungsweite bestimmt, um zu entscheiden, ob innerhalb der gebrauchten Schwingungsweiten die Veränderlichkeit der Dämpfung im Vergleich mit anderen Fehlerquellen vernachlässigt werden konnte, so wie man das bis dahin stillschweigend zu thun pflegte.

Ich bemerkte damals zunächst, dass die Abweichungen offenbar dem Quadrate der Schwingungsweite proportional sein müssen. Dann untersuchte ich das Dämpfungsverhältniss für zwei verschiedene Schwingungsweiten und schloss aus den Resultaten, welche ich in Zahlen mittheilte, dass für meine Zwecke und für das Maass der erreichbaren Genauigkeit meines Resultates der Fehler aus der Inconstanz des Dämpfungsverhältnisses nicht beträchtlich war.

Der Hr. Verfasser des eingangs erwähnten Einwandes nun behauptet am Schlusse seiner Auseinandersetzungen, dass dieser mein obengenannter „vermeintlicher Beweis der Constanz der Multiplicatorfunction jedenfalls einen erheblichen Fehler im Resultat der bezüglichen Untersuchungen des Hrn. Kohlrausch zur Folge gehabt habe“. Nach seinen „Erfahrungen über die Grösse der Inconstanz

1) H. Wild, Wied. Ann. 24. p. 209. 1895. Ich antworte hier nur auf denjenigen Theil dieser Veröffentlichung, welcher etwas Sachliches enthält. Die anderen darin mir gemachten Vorhalte überlasse ich der eigenen Kritik des Lesers.

2) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergbd. 6. p. 1. 1871.

bei ähnlichen Multiplicatoren dürfte der Fehler wohl nahezu 0,3 Proc. betragen“.

Selbstverständlich war ich zunächst der Meinung, eine solche bestimmte, mit gesperrter Schrift hervorgehobene Kritik seitens eines erfahrenen Beobachters gegenüber fremden Resultaten werde nicht grundlos abgegeben worden sein. Ich versuchte daher, mir den von dem Hrn. Verfasser nicht gegebenen Nachweis seiner Behauptung selbst zu liefern. Indessen, wie man sehen wird, mein Bemühen war vergeblich. Meine frühere Untersuchung des Multiplicators und die daraus gezogenen Schlüsse werden in einer, wie ich glaube, unanfechtbaren Weise bestätigt, wonach ich den Einwand in der That als einen irrthümlichen zurückweisen muss.

Es liegen nämlich ausser meinen Zahlen weitere eingehende Beobachtungen an dem von mir gebrauchten Galvanometer vor, da Hr. K. Schering bei seiner späteren grundlegenden Arbeit über die Inconstanz der Dämpfungsfunktion¹⁾ gerade dasselbe Instrument als Beispiel zu einer sorgfältigen Untersuchung verwendet hat.

Dieser Arbeit von Schering entnehme ich das Folgende, wobei ich zur Einfachheit aus seiner Theorie den Einfluss der Luftdämpfung weglasse und ferner das rücktreibende Drehungsmoment auf die Nadel dem Ausschlage proportional setze. Diese Umstände können hinreichend genau für sich behandelt werden; die daraus folgenden Correctionen sind in meiner Arbeit bereits berücksichtigt worden.

Die Schwingung einer Magnetnadel im geschlossenen Multiplicator finde statt nach dem Ausdruck²⁾:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2M(1 - M_1\varphi^2)\frac{d\varphi}{dt} + n^2\varphi = 0.$$

$M_1\varphi^2$ misst die Abhängigkeit der Dämpfungsfunktion von dem augenblicklichen Ausschlage φ .

Es sei nun λ der Grenzwert der natürlichen logarithmischen Decrementes für kleine Schwingungen. Dasjenige Decrement λ , welches aus zwei aufeinanderfolgenden beob-

1) K. Schering, Wied. Ann. 9. p. 287 u. 452. 1880.

2) K. Schering, p. 471.

achteten Ausschlägen α_1 und α_2 als $\lambda = \log(\alpha_1/\alpha_2)$ gefunden wird, ist dann nach Schering:

$$(1) \quad \lambda = A(1 - S_2 \alpha_1^2),$$

und die Geschwindigkeit v_0 , mit welcher die Nadel bei dem Antritt der grösseren Schwingung α_1 die Ruhelage passirte, ist:

$$(2) \quad v_0 = n \alpha_1 e^{\frac{A}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} A (1 - S_2 \alpha_1^2).$$

S_2 und S_3 sind Constanten des Galvanometers, die sich unter Zusammenfassung der Schering'schen Formeln ergeben:

$$(3) \quad S_2 = \frac{M_1}{8} \frac{1 - e^{-2\lambda}}{\lambda} \frac{\pi^2 + 7\lambda^2}{\pi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2},$$

$$(4) \quad S_3 = \frac{M_1}{8} \frac{e^{\frac{2\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} (\pi^2 + \lambda^2) - (\pi^2 + 7\lambda^2)}{\pi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2}.$$

Für mein Galvanometer findet Schering:

$$M_1 = 3,553.$$

Vergleich meiner früheren Beobachtungen über die Veränderlichkeit der Dämpfung. Es war hierbei¹⁾ das Dämpfungsverhältniss = 1,744, also $\lambda = \log \text{nat } 1,744 = 0,556$. Hieraus ergibt sich nach Formel (3) $S_2 = 0,64$.

Meine Beobachtungen gaben nun:

für den grösseren Schwingungsbogen 3° , d. h. $\alpha_1 = 0,026$ $\lambda = 0,55636$
 " " " " " 7° , d. h. $\alpha_1 = 0,061$ $\lambda' = 0,55585$

sodass ich gefunden hatte $\lambda/\lambda' = 1,0018$.

Nach Schering müsste sein:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1 - 0,026^2 \cdot 0,64}{1 - 0,061^2 \cdot 0,64} = 1,0019.$$

Meine Beobachtung wird also durch die später von Schering ausgeführte Untersuchung bestätigt.

Correction der absoluten Widerstandsbestimmung wegen der Inconstanz der Dämpfungsfunction bei Zurückwerfungsbeobachtungen mit dem Erdinductor. Ich schätzte seiner Zeit aus den eben gegebenen Beobachtungen, dass der Einfluss der Inconstanz des Däm-

1) F. Kohlrausch, l. c. p. 19.

pfungsverhältnisses etwa $\frac{1}{4000}$ des kleineren Schwingungsbogens betragen werde. Mit Rücksicht auf die Fehlerformeln¹⁾ würde das Endresultat hiernach etwa um $\frac{1}{2000}$ zu corrigiren sein. Da eine genaue Theorie des Einflusses damals nicht vorlag, so unterliess ich die neben den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern nicht erhebliche Correction.

Aus Schering's Abhandlung soll zunächst die erforderliche Correction allgemein abgeleitet und dann mit Hülfe der Beobachtungsdaten auf meine Messung angewandt werden.

Der absolute Widerstand W meiner Leitung (Erdinductor und Galvanometer) wäre, von dem Luftwiderstand abgesehen, zu berechnen gewesen²⁾:

$$(5) \quad W = 8\pi \frac{F^2 H^2}{t K} \frac{\Lambda}{I^2} \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + \Lambda^2}}.$$

Statt dessen wurde gerechnet:

$$(6) \quad w = 8\pi \frac{F^2 H^2}{t K} \frac{\lambda}{\gamma^2} \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}.$$

Inductorfläche F , Erdmagnetismus H , Schwingungsdauer t und Trägheitsmoment K sind in beiden Formeln gleich. Das logarithmische Decrement λ und die durch einen Inductionsstoss der Nadel zugefügte Winkelgeschwindigkeit γ sind aus dem grösseren und dem kleineren Ausschlage α_1 und α_2 bei der Zurückwerfungsmethode so berechnet worden, als wäre das Dämpfungsverhältniss von der Schwingungswerte unabhängig. λ und γ sind nun auf die corrigirten Werthe Λ und Γ umzurechnen.

Setzen wir:

$$\Lambda - \lambda = \Delta\lambda, \quad \Gamma - \gamma = \Delta\gamma,$$

so ist also der in gewöhnlicher Weise berechnete Widerstand w um Δw zu corrigiren, wo:

$$(7) \quad \frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \frac{\pi^2}{\pi^2 + \lambda^2} - 2 \frac{\Delta\gamma}{\gamma}.$$

Aus (1) folgt:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = + S_2 \alpha_1^2.$$

1) F. Kohlrausch, l. c. p. 18.

2) F. Kohlrausch, l. c. p. 14.

Um $\Delta\gamma$ zu erhalten, stellen wir folgende Ueberlegung an. Γ ist bei der Zurückwerfungsmethode gleich der Geschwindigkeit v_0 , mit welcher die Nadel ihre grössere Elongation α_1 antritt, vermehrt um die (absolute) Geschwindigkeit v_2 , welche sie am Ende der kleineren Elongation α_2 bei der Rückkehr in die Ruhelage noch besass, weil die Wirkung des Inductionsstosses sich aus der Vernichtung von v_1 und der Ertheilung von v_0 summirt.

$$\Gamma = v_0 + v_2.$$

Nun ist (Gl. 2):

$$(2) \quad v_0 = n \alpha_1 e^{\frac{\Delta}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\Delta}} (1 - S_3 \alpha_1^2).$$

v_2 lässt sich folgendermassen finden. Zunächst können wir die Geschwindigkeit v_1 , mit welcher die Nadel bei dem Antritt der kleineren Schwingung die Ruhelage passirt, in dem kleineren Ausschlage α_2 ebenso ausdrücken, wie eben v_0 in α_1 :

$$v_1 = n \alpha_2 e^{\frac{\Delta}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\Delta}} (1 - S_3 \alpha_2^2).$$

Setzt man hierin $\alpha_2 = \alpha_1 e^{-\lambda}$, so lässt sich v_1 schreiben:

$$v_1 = n \alpha_1 e^{-\lambda} e^{\frac{\Delta}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\Delta}} (1 - S_3 \alpha_1^2 e^{-2\lambda}),$$

und da $e^{-\lambda} = e^{-\Delta} e^{\Delta \lambda} = e^{-\Delta} (1 + \Delta \lambda) = e^{-\Delta} (1 + \lambda S_2 \alpha_1^2)$:

$$v_1 = n \alpha_1 e^{-\Delta} e^{\frac{\Delta}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\Delta}} (1 + S_2 \lambda \alpha_1^2 - S_3 \alpha_1^2 e^{-2\lambda}).$$

Höhere als zweite Potenzen von α_1 sind stets vernachlässigt.

Gerade so wie v_1 als Function der vorausgehenden Elongation α_1 wird nun v_2 sich als Function von α_2 ausdrücken:

$$(9) \quad v_2 = n \alpha_2 e^{-\Delta} e^{\frac{\Delta}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\Delta}} (1 + S_2 \lambda \alpha_2^2 - S_3 \alpha_2^2 e^{-2\lambda}).$$

Aus (2) und (9) findet sich die Summe $\Gamma = v_0 + v_2$ nach einigen einfachen Kürzungen:

$$\Gamma = n e^{\frac{\Delta}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\Delta}} (\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\Delta}) \left[1 + \frac{S_2 \lambda \alpha_2^2 e^{-\lambda} - S_3 \alpha_1^2 - S_3 \alpha_2^2 e^{-2\lambda}}{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\Delta}} \right].$$

Statt dessen wurde berechnet:

$$\gamma = n e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\Delta}} (\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\lambda}).$$

$\Delta\gamma/\gamma$ oder $(\Gamma - \gamma)/\gamma$ wird hieraus erhalten:

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = S_2 \left[\alpha_1^2 \left(\frac{\lambda}{\pi} \arctg \frac{\pi}{\lambda} - \frac{\lambda^2}{\pi^2 + \lambda^2} - \frac{\lambda \alpha_2 e^{-\lambda}}{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\lambda}} \right) + \frac{\lambda \alpha_2^3 e^{-\lambda}}{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\lambda}} \right] - S_3 \frac{\alpha_1^3 + \alpha_2^3 e^{-3\lambda}}{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\lambda}}.$$

Ersetzt man noch α_2 durch $\alpha_1 e^{-\lambda}$, so wird:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta\gamma}{\gamma} &= \alpha_1^2 \left[S_2 \lambda \left(\frac{1}{\pi} \arctg \frac{\pi}{\lambda} - \frac{\lambda}{\pi^2 + \lambda^2} - \frac{e^{-2\lambda} - e^{-4\lambda}}{1 + e^{-2\lambda}} \right) \right. \\ &\quad \left. - S_3 \frac{1 + e^{-6\lambda}}{1 + e^{-2\lambda}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Will man die Correction $\Delta w/w = (\Delta\lambda/\lambda) \pi^2/(\pi^2 + \lambda^2) - 2\Delta\gamma/\gamma$ zusammenfassen, so wird nach (7), (8) und (10):

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta w}{w} &= \alpha_1^2 \left[S_2 \left(-2 \frac{\lambda}{\pi} \arctg \frac{\pi}{\lambda} + 1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2 + \lambda^2} + 2\lambda \frac{e^{-2\lambda} - e^{-4\lambda}}{1 + e^{-2\lambda}} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 S_3 (1 - e^{-2\lambda} + e^{-4\lambda}) \right]. \end{aligned} \right.$$

Wenn λ gegen π klein ist, so rechnet man bequemer:

$$\frac{\Delta w}{w} = \alpha_1^2 \left[S_2 \left(+2 \frac{\lambda}{\pi} \arctg \frac{\lambda}{\pi} + 1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2 + \lambda^2} - \lambda \frac{1 - e^{-2\lambda} + 2e^{-4\lambda}}{1 + e^{-2\lambda}} \right) + 2 S_3 (1 - e^{-2\lambda} + e^{-4\lambda}) \right],$$

indem $\arctg \lambda/\pi$ nahe $= \lambda/\pi$ ist.

Numerische Bestimmung.

Bei der absoluten Widerstandsmessung¹⁾ war:

$\lambda = 0,495$, also $S_2 = 0,658$, $S_3 = 0,189$ (Gl. 3 und 4).

Weiter war die halbe grosse Amplitude $\alpha_1 = 0,0229$. Die relative Correction des logarithmischen Decrements auf kleine Schwingungen ist demnach:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = S_2 \alpha_1^2 = 0,00034,$$

beträgt also etwa $1/3000$.

1) F. Kohlrausch, l. c. p. 30.

Noch zehnmal kleiner wird die Correction der von dem Inductionsstosse mitgetheilten Winkelgeschwindigkeit γ , denn man erhält (Gl. 10) aus obigen Daten:

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = - 0,000\,04.$$

Die an der früheren Widerstandsberechnung anzubringende relative Correction beläuft sich also, wie ich dieselbe ungefähr auch geschätzt hatte, auf:

$$\frac{dw}{w} = \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\pi^2}{\pi^2 + \lambda^2} - 2 \frac{d\gamma}{\gamma} = + 0,00041,$$

also nicht 0,3, sondern 0,04 Procent.

Meine alte absolute Widerstandsbestimmung ist häufig Gegenstand der Discussion gewesen, um die beträchtliche Abweichung des von mir erhaltenen Resultates von anderen Messungen aufzuklären. Da ein Anderer so wenig wie ich selbst argwöhnen konnte, dass die bei der Herstellung des Inductors ausgeführte Messung seiner Windungsfläche die letztere über 1 Proc. zu gross ergeben hatte, wie ich später zeigte¹⁾, so wurden alle möglichen sonstigen Fehlerquellen von verschiedenen Seiten besprochen. Hierbei ist aber, wie ich gern constatare, nur ein Umstand gefunden worden, den ich bei meiner Arbeit übersehen hatte, d. i. die Selbstinduction des durch die schwingende Nadel inducirten dämpfenden Stromes. Hierauf haben die Herren Rowland und Stoleto²⁾ hingewiesen, und der letztere hat die hieraus entspringende Correction berechnet zu:

$$\frac{dw'}{w} = - 0,00032.$$

Es hebt sich also zufällig diese Correction gegen die in der vorliegenden Mittheilung aus der Inconstanz der Dämpfungsfuction berechnete bis auf den gegen die Beobachtungsfehler ganz gleichgiltigen Betrag von 0,01 Proc. heraus.

1) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. p. 661. 1882.

2) Rowland, Phil. Mag. (4) 50, p. 161. 1875; Stoleto²⁾, ib. p. 404.

Es bleibt also das von mir nach der Richtigstellung der Inductorfläche gegebene Resultat meiner Arbeit¹⁾:

$$1 \text{ Quecksilbereinheit} = 0,944 \text{ Ohm}$$

von den Correctionen unberührt.

Ich würde diese Umstände nicht einer Veröffentlichung für werth halten, wenn nicht meine damalige Messung der einzige Repräsentant der von Weber gegebenen combinirten Inductions- und Dämpfungsmethode wäre. In dieser Eigenschaft, und da die Messung mit der grössten Sorgfalt ausgeführt worden ist, darf ihr Ergebniss immer noch seinen Platz beanspruchen, auch wenn unter den neueren, von ausgezeichneten Beobachtern herrührenden Messungen sich natürlich solche befinden, welche ein grösseres Gewicht als meine vor 16 Jahren ausgeführte Bestimmung verdienen.

Praktische Ermittlung der Veränderlichkeit einer Multiplicatorfunction. Ich erlaube mir, einen kleinen Kunstgriff für diese Aufgabe zu empfehlen, der ihre Ausführung sehr genau und einfach macht. Der zu untersuchende Multiplicator stehe auf einer Kreistheilung, welche etwa Zehntelgrade zu schätzen gestattet, und deren Drehungsaxe mit dem Aufhängefaden der Nadel zusammenfällt. Ein Strom gehe durch diesen Multiplicator und durch ein zweites Spiegelgalvanoskop von nahe gleicher Empfindlichkeit. Eine Wiedemann'sche Bussole lässt diese Bedingung leicht erfüllen. Die Scalenabstände beider Instrumente seien nahe gleich.

Es werden nun die gleichzeitigen Nadeleinstellungen beider Instrumente bei verschiedenen Azimuthen des zu untersuchenden Multiplicators abgelesen. Man sieht leicht, wie auf diesem Wege die Correctionsconstante der Galvanometerfunction und die symmetrische Stellung des Multiplicators gegen die Nadel, unabhängig von den kleinen Schwankungen der Declination, Intensität und der Stromstärke selbst,

1) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. p. 661. 1882. Da mir diese ungefähre Neutralisation beider Umstände bekannt war, so habe ich dieselben in der kurzen Mittheilung nicht erwähnt.

mit jeder wünschenswerthen Schärfe erhalten wird. Die ganze Arbeit ist in einer Viertelstunde auszuführen.

Natürlich muss hierbei der etwaige eigene Localeinfluss des gedrehten Multiplicators auf die Nadel, sowie der zuweilen vorkommende Einfluss des mitgedrehten Deckglases auf die Einstellung des Spiegelbildes beachtet werden.

VII. Ueber einige neue Methoden zur Beobachtung electrischer Schwingungen und einige Anwendungen derselben¹⁾; von R. Colley.

(Hierzu Taf. IV Fig. 17—19.)

I. Theil. Versuchsmethoden.

§ 1. Die Möglichkeit einer schwingenden oder alternirenden Bewegung der Electricität bei der Entladung eines electrisch geladenen Leiters ist seit dem Jahre 1853 von W. Thomson²⁾ theoretisch vorausgesehen worden. Mehrere Forscher: Feddersen³⁾, v. Helmholtz⁴⁾, v. Oettingen⁵⁾, Bernstein⁶⁾ u. a. haben seitdem mittelst verschiedenartiger Versuchsmethoden die thatsächliche Existenz oscillirender Ströme bei der Entladung von Leydener Flaschen, sowie in ungeschlossenen Inductionsspiralen dargethan. Durch die Untersuchung von Schiller⁷⁾ für den letzteren Fall, und die von L. Lorenz⁸⁾ für den ersteren, ist die volle Uebereinstimmung der experimentellen Gesetze der Erscheinung mit

1) Auszug des Verfassers aus den Sitzungsberichten der physikalisch-mathematischen Abtheilung der Naturforschergesellschaft zu Kasan.

2) W. Thomson, Math. and phys. Papers. 1. p. 540.

3) Feddersen, Pogg. Ann. 103. p. 69. 1858; 108. p. 497. 1859; 112. p. 452. 1861; 113. p. 437. 1861; 115. p. 336. 1862; 116. p. 192. 1862. Die Resultate seiner Versuche sind von Kirchhoff commentirt und berechnet worden. (Gesamm. Abh. p. 168.)

4) v. Helmholtz, Gesamm. Abh. 1. p. 531.

5) v. Oettingen, Pogg. Ann. 115. p. 115. 1862.

6) Bernstein, Pogg. Ann. 13. p. 142. 1828.

7) Schiller, Pogg. Ann. 152. p. 535. 1872.

8) L. Lorenz, Wied. Ann. 7. p. 161. 1879.

den theoretischen nachgewiesen worden. Aus den späteren Arbeiten über diesen Gegenstand sind mir die folgenden bekannt: eine Arbeit von Mouton¹⁾, in welcher eine der Schiller'schen sehr ähnliche Versuchsmethode gebraucht und auch zu ähnlichen Resultaten gelangt wird, ferner die Aufsätze von v. Oettingen²⁾, Kolaček³⁾ und Olearsky⁴⁾, welche specielle Fragen auf diesem Gebiete behandeln. Oberbeck⁵⁾ bediente sich oscillirender Entladungen als Mittel zur Erzeugung alternirender Ströme für Versuche über galvanische Polarisation; Bichat und Blondlot⁶⁾ beobachteten die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch die electricischen Schwingungen.

Aus dem Gesagten ist ersichtlich, dass, Dank der soeben genannten theoretischen und experimentellen Arbeiten, die Gesetze der electricischen Schwingungen in den Hauptzügen als bekannt betrachtet werden können. Wenn ich trotzdem diese Erscheinung zum Gegenstande einer neuen Experimentaluntersuchung machte, so hatte ich dabei ein anderes Ziel im Auge. Es bestehen nämlich, wie die Theorie uns lehrt, gewisse mathematisch ausdrückbare Beziehungen zwischen den die alternirenden Ströme charakterisirenden Coëfficienten (der Schwingungsperiode und dem logarithmischen Decrement) einerseits und andererseits denjenigen Grössen, welche die Natur des Stromkreises bedingen. Im Falle eines einfachen metallischen Schliessungskreises, welcher mit einem Condensator in Verbindung steht, sind diese letzteren: die Capacität des Condensators, der Selbstinductionscoëfficient und der Widerstand der Leitung. Die Gleichungen, welche diese Beziehungen ausdrücken, erlauben einige unter den genannten Grössen zu bestimmen, wenn die anderen gegeben sind, resp. durch den Versuch ermittelt werden können. Dies gibt uns, wie mir scheint, ein neues und mächtiges

1) Mouton, Thèse. Paris 1876. Journ. de Phys. 6. p. 5. 46. 1876.

2) v. Oettingen, Pogg. Ann. Jubelbd. p. 269. 1874.

3) Kolaček, Beibl. 7. p. 541. 1883.

4) Olearsky, Verhandl. der Academie von Krakau. 7. p. 141. 1882.

5) Oberbeck, Wied. Ann. 17. p. 816. 1040; 19. p. 213. 625.

6) Bichat u. Blondlot, Compt. rend. 94. p. 1590—1882; Beibl. 6. p. 810.

Untersuchungsmittel auf dem Gebiete der Electricität in die Hände, denn: *erstens* kann es unter Umständen Anwendung finden, wo andere Methoden ihren Dienst versagen; *zweitens* für Grössen, die schon anderweitig bestimmt sind, kann es uns die Möglichkeit darbieten, dieselben auf eine neue, von den früheren principiell verschiedene Art zu messen, was stets eine wünschenswerthe Controle ihrer Genauigkeit ist; eine derartige Anwendung findet sich im neunten Theil dieser Abhandlung; *drittens* kann man mittelst derselben Untersuchungen bei ganz eigenthümlichen Versuchsbedingungen anstellen, wie es z. B. bereits Schiller für die Dielectricitätsconstanten bei sehr kurz dauernden Ladungen gethan hat.¹⁾

Es ist nicht zu vergessen, dass unsere gewöhnlichen galvanischen Messapparate, welche die Stromstärke (Galvanometer, Voltameter), oder die Stromenergie (Electrodynamometer, Riess'sches Thermometer) messen, uns entweder nur Mittelwerthe dieser Functionen für eine gewisse Zeit, oder auf bestimmte Zeitintervalle ausgedehnte Integrale derselben geben; wie aber diese Functionen selbst in den genannten Zeiträumen variiren, darüber geben sie uns keinen Aufschluss. Bei den electricischen Schwingungen können wir aber eben den zeitlichen Verlauf der Variation einer dieser Functionen messend verfolgen, was in vielen Fällen für das in Untersuchung stehende Problem von entscheidendem Einfluss sein kann.

Was das Messverfahren selbst anbelangt, so muss hier bemerkt werden, dass Versuchsmethoden, wie die von Bernstein, Schiller und Mouton in den Händen geübter Experimentatoren und bei Gebrauch sorgfältig eingerichteter und controlirter Instrumente allerdings sehr genaue Resultate geben können. Doch sind diese Methoden äusserst umständlich, denn die die Erscheinung darstellende Curve muss gewissermassen durch Aufsuchung ihrer einzelnen Punkte construirt werden. Eine jede solche Bestimmung nimmt aber

1) Schiller, l. c. p. 555. Die Resultate ergaben sich als sehr abweichend von denen bei längerer Ladungsdauer.

einen selbständigen, oft ziemlich complicirten Versuch in Anspruch, und ausserdem muss das Phänomen selbst unbedingt eine gewisse Constanz und Regelmässigkeit darbieten, d. h. sich beliebig oft auf ganz identische Weise wiederholen lassen können. Sobald der Stromkreis nicht allein aus metallischen Leitern besteht, sondern Electrolyte, Funkenstrecken oder dergl. enthält, so ist diese Constanz kaum erreichbar, und folglich das Verfahren nicht anzuwenden.

Ich stellte mir zum Ziel, mich zunächst nach Methoden umzusehen, welche den obenerwähnten an Genauigkeit nicht nachstünden, aber einfacher und bequemer in der Anwendung wären. Der Beschreibung dieser Methoden widme ich den ersten Theil dieser Abhandlung. Der Verständlichkeit wegen muss ich jedoch zuvor an die Theorie der Erscheinung erinnern und zugleich einige allgemeine Bemerkungen über den Gang derselben hinzufügen.

§ 2. Es sei c die Capacität eines Condensators, dessen Belege durch einen Schliessungsbogen vom Widerstand r und Selbstinductionscoefficient p verbunden sind. Der eine Beleg sei stets zur Erde abgeleitet, das Potential des andern erhalte in dem Augenblicke, den wir als Zeitanfang nehmen, einen gewissen Maximalwerth v_0 ; zur Zeit t sei v dies Potential und i der Strom im Schliessungskreise, wobei der Entladungsstrom des positiv geladenen Condensators als positiver Strom gerechnet wird. Drücken wir nun aus: erstens, dass die in dem Zeitelement durch die Leitung in positiver Richtung fliessende Electricitätsmenge gleich der entsprechenden Abnahme der Ladung des Condensators ist, und zweitens, dass das Product der Stromstärke und des Widerstandes gleich der Summe aller electromotorischen Kräfte im Stromkreise ist, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$(1) \quad i = -c \frac{dv}{dt},$$

$$2) \quad ir = v - p \frac{di}{dt}.$$

Ist $4p/c > r^2$, so stellen diese Gleichungen eine oscillirende Bewegung der Electricität dar; dieser Fall allein soll der Gegenstand aller nachfolgenden Betrachtungen sein. Führen

wir zwei neue Grössen, τ , die Dauer einer (einfachen) Schwingung, und λ , das logarithmische Decrement ein, welche durch die zwei Gleichungen:

$$(3) \quad 2 \frac{\lambda}{\tau} = \frac{r}{p}, \quad (4) \quad \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\tau^2} = \frac{1}{p^2 c}$$

definirt werden, und nehmen wir, wie oben angedeutet, als Anfangsbedingungen $i = 0$, $v = v_0$ für $t = 0$, so erhalten wir durch Integration:

$$(5) \quad v = \frac{v_0}{Cs\delta} e^{-\frac{\lambda}{\tau} t} Cs \left(\frac{\pi}{\tau} t - \delta \right), \quad (6) \quad i = \frac{v_0}{Cs\delta} \sqrt{\frac{p}{c}} e^{-\frac{\lambda}{\tau} t} \sin \frac{\pi}{\tau} t,$$

wo $\delta = \arctg \lambda/\pi$ ist.

Die Formeln (5) und (6) drücken die Gesetze der Erscheinung aus.

Die electrischen Schwingungen können auf verschiedene Art hervorgerufen werden.

1) Man kann einen Condensator, z. B. eine Leydener Flasche, durch irgend welche Electricitätsquelle laden und sie dann durch den Schliessungskreis entladen. (Feddersen, Lorenz).

2) Man kann die Schwingungen in einer ungeschlossenen Inductionsrolle hervorbringen, indem man den Hauptstrom in der inducirenden Rolle schliesst und unterbricht. Diese Methode ist von v. Helmholtz, Bernstein, Schiller und Mouton angewendet worden; ich bediente mich auch derselben, bis ich es zweckmässiger fand, sie durch die folgende zu ersetzen.

3) Die Energie eines electromagnetischen Feldes wird benutzt, um in einem Stromkreise, dessen Enden mit den Belegen eines Condensators in Verbindung stehen, eine alternirende Bewegung der Electricität hervorzurufen und zu unterhalten, bis der Energievorrath durch die Ueberwindung des Widerstandes der Leitung und einige andere hier mögliche Wirkungen verbraucht wird. Fig. 17 zeigt die Anordnung des Versuchs. E ist eine Kette (bei meinen Versuchen meistens 8 Bunsen'sche Elemente), B eine Drahtrolle oder Rollensystem, in einigen Fällen mit Eisenkern, C der Condensator, A der zur Beobachtung der Schwingungen dienende

Apparat, K ein Commutator. Es ist leicht zu sehen, dass, solange K geschlossen ist, der Strom der Kette durch die Drahtrollen B geht; unterbricht man ihn aber bei K , so ladet der Oeffnungsextrastrom den Condensator, und in dem Kreise BAC entstehen Schwingungen. Diese Methode erwies sich aus zwei Gründen vortheilhafter, als die vorhergehende: erstens konnte eine grössere Anfangsamplitude erzielt werden¹⁾, zweitens waren keine Störungen zu befürchten, welche, wie es bei der vorhergehenden Methode der Fall ist, von der Gegenwart eines zweiten benachbarten Stromkreises herrühren könnten, denn in Bezug auf den letzteren kann man nämlich nicht mit Gewissheit entscheiden, von welchem Momente an er wirklich unterbrochen ist; weiter unten werden Versuche angeführt werden, aus welchen ersichtlich ist, dass er wenigstens bei starken Strömen eine nicht unerhebliche Zeit durch Vermittelung des Oeffnungsfunkens geschlossen bleibt.

Die Anfangsbedingungen der Erscheinung können leicht auf folgende Weise festgestellt werden, wenn man in Betracht zieht, dass die Gegenwart des Condensators in den ersten Augenblicken, solange er nämlich noch keine endliche Ladung besitzt, auf die Potentialvertheilung in dem betreffenden Schliessungskreise keinen Einfluss ausübt. Ein derartiges Problem für einen geschlossenen Kreis ohne Condensator ist von Lord Rayleigh²⁾ behandelt worden. Es sei J die Stromintensität in EBK , solange K geschlossen ist, p_1 der Selbstinductionscoefficient des Rollensystems B , p_2 der des Apparats A , welcher auch Spiralen, resp. Electromagnete, enthält (die Summe $p_1 + p_2 = p$ ist der Coefficient des ganzen Kreises ABC). Der Anfangswerth i_0 des

1) Die Einrichtung der mit A bezeichneten verschiedenen Messapparate, deren Beschreibung weiter unten folgt, erforderte, dass die Spiralen B von dickem Draht und der Condensator von bedeutender Capacität seien. Man konnte also, wegen des geringen Widerstandes der ersteren, in ihnen einen starken Strom und folglich ein intensives magnetisches Feld erhalten; mit der Capacität des Condensators wuchs der Effect der Ströme auf die Apparate A .

2) Lord Rayleigh (the Hon. J. W. Strutt). Phil. Mag. (4) 38. p. 1. 1869.

Stromes i in ABC , welcher dem Unterbrechungsmoment des Stromes in EBK , (nicht aber unserem Zeitanfange $t = 0$) entspricht, wird dann durch die Gleichung:

$$p_1 J = (p_1 + p_2) i_0$$

bestimmt. Die Energie des Stromes i_0 ist $\frac{1}{2}(p_1 + p_2) i_0^2$; denkt man sich, dass sie in dem Condensator bei der ersten Ladung derselben bis zum Potential v_0 angehäuft wird, d. h. vernachlässigt man den Energieverlust während der ersten halben Schwingung, so hat man zur Bestimmung von v_0 die Gleichung:

$$\frac{1}{2} c v_0^2 = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) i_0^2 = \frac{1}{2} \frac{p_1^2}{p_1 + p_2} J^2.$$

Einen etwas genaueren Werth von v_0 erhält man, wenn man den genannten Energieverlust berücksichtigt. Zu diesem Zwecke muss man das logarithmische Decrement λ kennen, auch muss man voraussetzen, dass die Erscheinung während der ersten halben Schwingung denselben Gesetzen folgt, wie in den nachfolgenden, was, wie Schiller, Mouton u. a. gezeigt haben, nur annähernd richtig ist. Ich will mich bei diesen Rechnungen nicht aufhalten, da die Kenntniss des genauen Werthes von v_0 für unsere Zwecke kein besonderes Interesse darbietet. Um eine Idee von der Grössenordnung von v_0 zu geben, will ich erwähnen, dass bei der Anordnung der Apparate, mit welcher die meisten meiner Versuche ausgeführt worden sind, diese Grösse ca. 250 Volts betrug.

§ 3. Es sei mir gestattet, an dieser Stelle einige Bemerkungen über den allgemeinen Gang der Erscheinung unter den Versuchsbedingungen, die bei meiner Anordnung der Apparate zugegen waren, hinzuzufügen. Aus Gl. (3) und (4) erhalten wir zunächst:

$$(7) \quad \tau = \pi \frac{2p}{\sqrt{4 \frac{p}{c} - r^2}},$$

$$(8) \quad \lambda = \pi \frac{r}{\sqrt{4 \frac{p}{c} - r^2}}.$$

Bei meinen Apparaten war nicht nur $4(p/c) > r^2$, was erforderlichlich ist, damit der Strom alternirend, d. h. τ und λ

1) Diese Grösse ist stets kleiner, als $\frac{1}{2} p_1 J^2$, die Energie des Stromes J ; die Differenz beider Grössen stellt die Energie dar, welche als Wärme in dem Unterbrechungsfunken auftritt. Vgl. Strutt I. c.

reell seien, sondern es war r^2 verschwindend klein gegen $4(p/c)$. Lässt man r^2 im Nenner weg, so vereinfachen sich die Ausdrücke, und wir erhalten:

$$(9) \quad r = \pi \sqrt{p c}, \quad (10) \quad \lambda = \frac{\pi r}{2} \sqrt{\frac{c}{p}}.$$

Die erstere Formel drückt die praktisch sehr wichtige Thatsache aus, dass die Schwingungsperiode vom Widerstande der Leitung so gut wie unabhängig ist, wenn nur letzterer nicht allzugross ist.

Die zweite Formel gibt uns den Werth des logarithmischen Decrements oder kürzer des „Dämpfungscoefficienten“ λ . Diese Grösse ist ein Maass für die Schnelligkeit des Verbrauches der Schwingungsenergie, d. h. der Verwandlung derselben in Wärme. Berechnet man aber λ aus Gl. (10) und vergleicht mit der Erfahrung, so findet man, dass der wirkliche Werth von λ stets bedeutend grösser als der durch Rechnung gefundene ist. Am Anfange meiner Untersuchung, bevor ich die Hauptursachen dieses Unterschiedes ins Klare gebracht hatte, war dies ein sehr verwirrender und störender Umstand für mich; die Dämpfung ist zuweilen so stark, dass die ganze Erscheinung der electricischen Schwingungen dadurch gewissermassen bis zur Unkenntlichkeit entstellt werden kann. Ich erlaube mir daher, hier ein paar Worte über diesen Gegenstand beizufügen.

In unseren Grundgleichungen ist stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, dass die Energie der alternierenden Ströme einzig und allein zur Wärmeentwicklung in den Leitern des Stromkreises nach dem Joule'schen Gesetze verbraucht wird. Ein schnellerer Verbrauch der Energie, als es die Theorie erfordert, weist also zweifellos darauf hin, dass auf Kosten derselben noch andere Wirkungen hervorgebracht werden, die nicht berücksichtigt worden sind.

1. Der erste Umstand, der eine Vergrösserung von λ bewirken kann, ist der Gebrauch von Eisenkernen, die in die Spiralen eingeschoben werden. Der Durchgang von unterbrochenen oder von alternierenden Strömen durch die letzteren bringt, wie zahlreiche Versuche¹⁾ gezeigt haben,

1) Siehe Wiedemann, Electricität. 3. p. 409 u. 621.

eine Erwärmung der Eisenkerne hervor. Was auch die Ursache dieser Erscheinung sein mag, sei es eine Art innerer Reibung der Eisenmoleculé oder eine Einwirkung von Inductionsströmen, so kann die Wärme in den Eisenkernen nur auf Kosten der Energie der Schwingungen sich entwickeln, muss also eine raschere Dämpfung der letzteren bewirken. Offenbar übt hier der Eisenkern eine in beiden Fällen leicht zu erklärende Rückwirkung auf die ihn umgebende Spirale aus. Aus meinen Versuchen habe ich den Schluss ziehen können, dass die Inductionsströme hier eine vorwiegende Rolle spielen. Bei Bündeln von dünnen und sorgfältig lackirten Eisendrähten war die Wirkung sehr viel geringer, als bei dickeren Drähten; mit einem massiven Eisencylinder waren keine Schwingungen mehr zu erhalten. Ich will hier beiläufig bemerken, dass der Gebrauch von Eisen für genaue Versuche noch aus einem anderen Grunde verwerflich ist: der Selbstinductionscoëfficient einer Rolle mit Eisenkern wäre nur in dem Falle eine constante Grösse, wenn das magnetische Moment des letzteren der Stromstärke stets proportional wäre. Dem ist aber, wie die Erfahrung lehrt, nicht so; die Abhängigkeit dieser beiden Grössen voneinander ist im Gegentheil eine sehr complicirte. Bei genauen Versuchen entschloss ich mich daher, auf den Gebrauch von Eisenkernen gänzlich zu verzichten.

2. Eine mangelhafte Isolation der dielectricischen Schicht des Condensators hat auch ein rascheres Verschwinden der Schwingungen zur Folge, denn ein Theil der Energie muss dann als Wärme in dem Dielectricum auftreten. Dieses Problem ist schon von Schiller¹⁾ mathematisch behandelt worden. In den Grundgleichungen muss zu dem Strom i durch die Leitung noch ein anderer durch das Dielectricum gehende hinzukommen, welcher der Potentialdifferenz v der Belege direct, dem Widerstande ρ des Dielectricums umgekehrt proportional ist. Man erhält so für τ und λ Ausdrücke, welche sich von den früheren dadurch unterscheiden, dass zu dem Widerstande r des Leitungsbogens noch ein Glied

1) Schiller, l. c. p. 536 u. 560.

von der Form $p/c\varrho$ hinzutritt. Ist die Isolation nicht gar zu schlecht, d. h. ϱ nicht gar zu klein, so ist dies Glied im allgemeinen von derselben Grössenordnung wie r . Wenn also r , wie oben angegeben, verschwindend klein gegen $\sqrt{4p/c}$ ist, so hat dieses Glied keinen Einfluss auf die Schwingungsperiode τ , wohl aber auf den Dämpfungscoefficient λ , welcher dem Werthe von r , resp. $r + p/c\varrho$ proportional ist.

3. Eine dritte, nicht minder wesentliche Ursache, welche die Dämpfung der Schwingungen vergrössern kann, ist die electricische Absorption. Es ist leicht zu sehen, dass diese Erscheinung von Energieverbrauch begleitet ist. Man denke sich einen Condensator, der mit einer bestimmten Menge positiver Electricität geladen sei; durch die electricische Absorption vermindert sich das Potential der Ladung, und beim Ausladen sinkt dieselbe Electricitätsmenge von einem minder hohen electricchem Niveau auf Null herunter. Diese verlorene Energie tritt als Wärme in dem Dielectricum auf.¹⁾ Im Falle, dass die Belege des Condensators mit Electricitätsquellen von constanter Potentialdifferenz, z. B. den Polen einer Kette verbunden werden, erhält man zunächst einen starken, nahezu momentanen, Ladungsstrom, dann aber zeigt sich ein langsames allmähliches Ansteigen der Ladung. Als erste und völlig genügende Annäherung kann man annehmen, dass diese Zunahme während eines nicht zu grossen Zeitintervalles der Ladungszeit proportional ist. Es folgt daraus, dass der die Ladungszunahme hervorbringende Strom, während des genannten Zeitintervalles, bei gegebener Potentialdifferenz constant ist. Ist letztere variabel, so ist er ihr proportional, wie aus zahlreichen Versuchen folgt, welche constatiren, dass das als scheinbare Zunahme der Capacität oder der Dielectricitätsconstante aufgefasste Phänomen von

1) Es lässt sich leicht beweisen, dass bei einem vollkommenen Condensator alle zu seiner Ladung verwendete Energie beim Ausladen in den Schliessungsbogen wieder frei wird. Das von Siemens, Herwig u. a. constatirte Auftreten von Wärme in dem Dielectricum kann also nur von Leitung, electriccher Absorption oder ähnlichen Processen, die von Energieverbrauch begleitet sind, herrühren.

der Potentialdifferenz unabhängig ist¹⁾, was ich auch bei meinem Versuche bestätigt fand. Wir haben aber gesehen, dass bei einem Dielectricum, welchem wir eine gewisse (constante) Leitungsfähigkeit zuschreiben, der durch dieselbe bedingte Strom auch der Potentialdifferenz der Belege proportional, sonst aber constant ist. Daraus folgt, dass der bei der electricischen Absorption auftretende Strom ganz denselben Gesetzen folgt, wie der letztgenannte Leitungsstrom, und die mathematische Behandlung der beiden Fälle ist völlig identisch, wenn man nur bei der electricischen Absorption ein kurzes Zeitintervall betrachtet. Da nun aber bei den electricischen Schwingungen die Ladung des Condensators stets nur sehr kurze Zeit dauert, um dann zu verschwinden und einer entgegengesetzten Platz zu machen, so sind hier die soeben genannten Annahmen völlig zulässig, und die Einwirkung der electricischen Absorption lässt sich mathematisch auf die einer mangelhaften Isolation des Dielectricums zurückführen. Auf die Analogie dieser beiden Erscheinungen hat übrigens schon Maxwell²⁾ aufmerksam gemacht.

§ 4. Ich gehe jetzt zur Beschreibung der Apparate über, die zur Beobachtung der electricischen Schwingungen, namentlich zunächst zur Ausmessung ihrer Periode dienen. Meine Drahtrollen und Condensatoren hier ausführlich zu beschreiben, unterlasse ich, da diese Apparate, sowie die Methoden zur Bestimmung ihrer bezüglichen Constanten in absolutem Maasse im zweiten Theile dieser Abhandlung ausführlich besprochen werden sollen. Ich will hier nur kurz erwähnen, dass die Rollen aus dickem, gut isolirten Kupferdraht bestanden und einen geringen Widerstand besaßen. Sie konnten theils ineinandergeschoben, theils nebeneinandergelegt und so zu einem System angeordnet werden, welches als eine einzige Rolle fungirte, in welchem aber zwischen den einzelnen Drahtschichten eine nur unbedeutende Potentialdifferenz bestehen konnte. Das System konnte also nur eine sehr kleine electrostatische Ladung annehmen, und seine

1) Siehe: Schiller, l. c. p. 558; Silow, Pogg. Ann. 158. p. 311. 1876; Herwig, Wied. Ann. 13. p. 172. 1881.

2) Maxwell, Electr. a. Magn. 1. p. 374. (1. Ausgabe).

electrostatische Capacität (die ich aus einigen hier weiter nicht zu erledigenden Gründen auf weniger als 0,001 Mikrofarad schätze) war im Vergleich mit der Gesamtcapacität meiner Condensatoren (2,12 Mikrofarad) verschwindend klein. Ich konnte also diese Grösse, die ihrem Wesen nach ziemlich unbestimmt, und deren Constanz und Unabhängigkeit von der Versuchsanordnung jedenfalls noch des Beweises dürftig ist, ohne weiteres bei meinen Versuchen vernachlässigen. Zur Anfertigung der Condensatoren wurden Stanniolblätter abwechselnd mit Schichten des Isolators aufeinandergelegt. Letzterer bestand entweder aus zwei Blättern starken, in kochendem Paraffin getränkten Papieres oder aus zwei Blättern dünneren Paraffinpapiers, zwischen denen noch eine Schicht mit Schellackfirniss bestrichenen Baumwollenzuges sich befand. Das Isolationsvermögen der Condensatoren liess wenig zu wünschen übrig, doch erwies sich die electricische Absorption als sehr bedeutend; infolgedessen wurden die electricischen Schwingungen stark gedämpft. Dies war ein sehr ungünstiger Umstand, doch erlaubten leider die Hilfsmittel unseres physikalischen Cabinets nicht, einen Condensator von genügender Capacität aus einem besseren Material anzuschaffen.

A. Das Telephon war der erste Apparat, mit dem ich die Periode der electricischen Schwingungen zu messen suchte, indem ich eine Bestimmung der entsprechenden Tonhöhe vornahm. Da ein gewöhnliches Telephon mit langem und dünnem Draht nicht in den Hauptstrom eingeschlossen werden kann, ohne die Schwingungen wegen seines grossen Widerstandes stark zu dämpfen, so habe ich für diese Versuche ein besonderes Telephon, System Siemens, mit dickerem Draht construiren lassen, das einen Widerstand von nur 2,12 Ohm besass. Denselben Zweck erreicht man einfacher, indem man ein gewöhnliches Siemens'sches Telephon in einen besonderen secundären Kreis einschliesst. Durch Vermittelung zweier übereinandergeschobener Spiralen, deren eine von geringem Widerstande dem primären, die zweite von grösserem dem secundären Kreise angehört, können in letzterem Schwingungen von derselben Periode wie die des

ersteren inducirt werden. Freilich übt die Gegenwart des secundären Stromkreises einen Einfluss auf die gemeinsame Schwingungsperiode beider Kreise aus, doch wenn die erstgenannte der beiden Spiralen klein ist im Vergleich mit den übrigen Spiralen des primären Stromkreises, so ist dieser Einfluss nur äusserst gering.

Sind die Schwingungen langsam, d. h. gebraucht man Condensatoren von grosser Capacität und Rollen von grossem Selbstinductionscoëfficienten, so lässt das Telephon ganz deutlich einen Klangunterschied bei der Aenderung der Schwingungsperiode erkennen. Bei einiger Uebung gelang es mir, die betreffende Tonhöhe durch Vergleich mit dem Tone eines Monochords feststellen zu können. Das Verfahren wird durch die grosse Unähnlichkeit der Klangfarbe beider Töne, sowie das rasche Verklingen des einen (wegen der starken Dämpfung der electrischen Schwingungen) sehr erschwert. Aus diesem Grunde verzichtete ich darauf, genaue messende Versuche nach dieser Methode anzustellen; zu einer vorläufigen Orientirung über den ungefähren Werth der Schwingungsperiode und etwaige Aenderungen derselben erwies sich aber das Telephon als sehr nützlich. Bei Schwingungen, die weniger rasch gedämpft werden als die meinigen, wird es gewiss von noch grösserem Nutzen sein.

Bei raschen Schwingungen, (deren Tonhöhe jedoch als innerhalb der Hörbarkeitsgrenze liegend berechnet wurde), versagte mir das Telephon seinen Dienst. Sein Klang verwandelte sich dabei in einen kurzen Laut, welcher ganz demjenigen glich, den man durch Anklopfen mit dem Finger oder einem weichen Hammer auf die Telephonplatte erhält. Versuche, die ich mit Entladungen von Leydener Batterien nach dieser Methode anstellte, blieben ohne Erfolg. Ob das nur von dem zu raschen Abklingen meiner Töne oder von etwaigen Eigenthümlichkeiten des Telephons selbst abhing, weiss ich nicht zu sagen.

Ich will hier noch erwähnen, dass bei allen diesen Versuchen in den Drahtrollen und in den Condensatoren, besonders wenn letztere von Paraffinpapier sind, gewisse Töne hör-

bar sind¹⁾; auch wenn man die electricischen Schwingungen nach der zweiten im § 2 erwähnten Methode, d. h. durch Induction in einem secundären ungeschlossenen Stromkreise erzeugt, so wird die Stromunterbrechung im primären Kreise vom Geräusch des Oeffnungsfunkens begleitet. Alle diese Klänge, wenn sie gleichzeitig zugegen sind, lassen dieselbe Tonhöhe erkennen, und es findet sich, dass der Klang des Telephons nur eine treue Reproduction derselben ist (abgesehen von der diesem Instrumente eigenen metallischen Klangfarbe). Dieses Ergebniss ist in zweierlei Hinsicht beachtenswerth. Erstens folgt daraus, dass zwischen diesen Tönen und den electricischen Schwingungen ein enger Zusammenhang besteht; letztere müssen als die Ursache der ersteren betrachtet werden. Zweitens sieht man, dass bei Gebrauch der soeben erwähnten zweiten Versuchsmethode der primäre Stromkreis eine zeitlang durch Vermittelung des Funkens geschlossen bleibt, während in dem secundären electricische Schwingungen vorgehen; wäre das nicht der Fall, so könnte der Ton des Funkens nicht von der Schwingungsperiode abhängen. Wegen der gegenseitigen Einwirkung beider Stromkreise ist also diese Methode principiell sehr complicirt und lässt sich für genaue Versuche, wenigstens bei starken Strömen, nicht empfehlen.

Die Apparate, die von mir speciell zur Beobachtung electricischer Schwingungen construirt worden sind, werde ich kurz Oscillogramm nennen; die besten Resultate erhielt ich mit dem

B. Spiegeloscillogramm. Das Princip desselben beruht auf der Combination zweier Bewegungen, der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung eines Lichtpunktes und der eines Spiegels, welcher durch alternirende Ströme in Oscillationen versetzt wird. Ich will hier bemerken, dass dieser Apparat zur Beobachtung nur verhältnissmässig langsamer Schwingungen geeignet ist.²⁾ Das von mir gebrauchte Exemplar hatte einen ziemlich provisorischen Charakter;

1) Ueber das Auftreten von Tönen bei unterbrochenen Strömen unter ähnlichen Umständen siehe Wiedemann, *Electricität*. 2. p. 105, 3. p. 730.

2) Bei den im zweiten Theil dieser Abhandlung beschriebenen mit diesem Apparat ausgeführten Versuchen variierte die Schwingungsperiode zwischen den Grössen 0,0013 und 0,0016 Secunden.

Fig. 18 stellt die Haupttheile desselben dar; das Instrument ist einer viel vollkommeneren Construction fähig. Der wesentlichste Bestandtheil derselben ist eine Art Galvanometer G ; es besteht aus zwei Drahtrollen; die innere Bohrung der vorderen Rolle erweitert sich kegelförmig nach vorn. Beide sind in einen massiven Messingring eingesteckt und vermittelt eines Holzstabes B an einem Stativ befestigt. Durch Vermittelung passender Oeffnungen und zweier federnder Messingstücke q und q' ist zwischen den beiden Rollen in verticaler Richtung ein Coconfaden ausgespannt. Dieser trägt in seiner Mitte einen sehr leichten versilberten Glasspiegel p von etwa 5 mm Durchmesser, auf dessen Rückseite eine kleine flache, stark magnetisirte Stahllamelle aufgeklebt ist. Vor der kegelförmigen Oeffnung der vorderen Drahtspirale befindet sich eine ziemlich massive Kupferscheibe S , die vermittelt eines Uhrwerkes und eines Schnurlaufes in sehr gleichmässige Drehung versetzt werden kann. Die Scheibe S trägt nahe am Rande ein nadelfeines Loch O , welches durch das Tageslicht von einem gegenüberliegenden Fenster erhellt wird. Bei einer bestimmten Stellung der Scheibe kann man das Bild der Oeffnung O im Spiegel p durch das in gleicher Höhe mit der Drehungsaxe der Scheibe angebrachte Mikroskop M sehen, welches in der Focalebene ein verticales Mikrometer trägt. Die Bewegung des Spiegelbildes kann auf der kurzen Strecke, die es im Gesichtsfelde durchläuft, als geradlinig, vertical und gleichförmig angesehen werden. Werden aber durch die Drahtrollen G alternirende Ströme geleitet, so ertheilen sie dem Spiegel eine horizontale oscillatorische Bewegung. Die Combination dieser beiden Bewegungen gibt eine Sinuscurve mit abnehmender Amplitude. Misst man die Wellenlänge mit dem Mikrometer und kennt man die Umdrehungszeit der Scheibe S , so ergibt sich daraus unmittelbar die Schwingungsperiode.

Zur bequemen und sicheren Beobachtung dieser Curve ist es unerlässlich, dass bei jedem Erscheinen derselben im Gesichtsfelde ihr Anfangspunkt stets auf einen bestimmten Theilstrich des Mikrometers falle. Zu diesem Zwecke wird die Stromunterbrechung automatisch durch die Scheibe S

bewerkstelligt. Sie trägt in einer Entfernung von ungefähr einem Quadranten von der Oeffnung *O* ein vorragendes Metallstück *a*, welches bei jeder Umdrehung auf das eine Ende des Hebels *b* aufschlägt, wodurch das andere Ende in die Höhe gehoben wird. Letzteres besteht aus einem Platinstängelchen und taucht in ein mit Weingeist gefülltes Gefäß *c*, in dessen Boden eine ziemlich massive Platinscheibe eingelassen ist, mit welcher es im Ruhezustande in Berührung steht und den Durchgang des Stromes vermittelt. Arbeitet man nach meiner dritten Versuchsmethode (mit dem Oeffnungsextrastrom), wie ich es stets mit diesem Apparate gethan habe, so entspricht die soeben beschriebene Vorrichtung dem Stromunterbrecher *K* des Schemas Fig. 17, die Rollen *G* dem Apparate *A*. Will man nach der zweiten Methode arbeiten, so muss selbstverständlich erstere in den primären, letztere in den secundären Stromkreis eingeschaltet werden. Durch Verschiebung des den Hebel *b* tragenden Stativs und, zur feineren Regulirung, durch Heben und Senken des Gefäßes *c* durch Stellschrauben kann man es dahin bringen, dass das erste Maximum der Curve stets sehr annähernd mit einem bestimmten Theilstrich des Mikrometers zusammenfalle. Ist der Unterbrechungsfunke klein, so lässt sich dies ohne Schwierigkeit erreichen; bei jedem einzelnen Erscheinen der Curve im Gesichtsfelde wich bei meinen Versuchen dieser Anfangspunkt im Durchschnitt nicht mehr als 0,1, selten bis zu 0,2 Theilstriche, von einer gewissen mittleren Lage nach der einen oder der anderen Seite ab. Bei grösseren Untersuchungsfunken sind diese Abweichungen etwas bedeutender; jedenfalls kann man sich aber durch ungefähre Schätzung der Funkenlänge und der entsprechenden Verschiebungen des Hebels *b* und des Lichtpunktes im Gesichtsfelde überzeugen, dass bei Gebrauch meiner dritten Versuchsmethode die Stromunterbrechung lange vor Eintritt des ersten Maximums vollendet ist, sodass von diesem Momente an die Erscheinung als frei von allen fremden störenden Einflüssen vorgehend betrachtet werden kann. In Bezug auf die Drahtrollen will ich noch bemerken, dass bei der Anfertigung derselben darauf getrachtet wurde, wenig wirksame Win-

V
2
61
8
8
5

XUM

dungen, welche den Widerstand und den Selbstinductionscoëfficient unnützerweise vergrössern, möglichst zu vermeiden. Die inneren Windungen waren aus dünnerem, die äusseren aus dickerem Draht gewickelt. Der Messingring, welcher die Rollen umgab, trug zwar wegen der in ihm inducirten Ströme zur rascheren Dämpfung der Schwingungen bei, indess verminderte er aus demselben Grunde bedeutend den Selbstinductionscoëfficienten des Apparates und infolgedessen den Funken im Unterbrecher.¹⁾ Ausser den beschriebenen Theilen gehörte zu dem Apparate ein in der Figur nicht abgebildeter, horizontaler Magnetstab, welcher auf einem besonderen Stativ in gleicher Höhe mit dem Magnet *p* beweglich aufgestellt war. Sein Hauptzweck war, den letzteren unabhängig vom Erdmagnetismus und der Torsion des Coconfadens stets den Windungen der Rollen parallel zu stellen.

Aus der Theorie des Apparates kann man leicht ersehen, dass die im Gesichtsfelde sichtbare Curve sehr annähernd als eine graphische Darstellung der zeitlichen Variation der entsprechenden Stromintensität angesehen werden kann. Wir haben es nämlich hier mit einem Falle sogenannter „erzwungener Schwingungen“ zu thun; nur vereinfacht sich hier das Problem sehr bedeutend, indem man in Betracht zieht, dass die Richtkraft des aus der Gleichgewichtslage abgelenkten Magnets sehr klein im Vergleich mit den übrigen auf ihn einwirkenden Kräften ist; dies ist schon daraus ersichtlich, dass die Schwingungsperiode des sich selbst überlassenen Magnets und diejenige, welche ihm durch die Einwirkung der electricischen Schwingungen ertheilt wird, praktisch von verschiedener Grössenordnung sind. Berücksichtigt man also nur: 1. die Einwirkung der durch die Drahtrollen

1) Vgl. Strutt, l. c. p. 6. Nach meinen Beobachtungen stimmen übrigens die theoretischen Betrachtungen dieses Autors insofern mit der Erfahrung nicht ganz überein, als bei allmählicher Aenderung der Versuchsanordnung der Uebergang des Funkens von einer verschwindend kleinen zu einer bedeutenden Grösse nicht allmählich, sondern plötzlich erfolgt. Dies hängt offenbar davon ab, als die Funkenbildung, besonders innerhalb einer isolirenden Flüssigkeit, selbst ein sehr complicirtes Phänomen ist. Es würde mich zu weit führen, auf diesen Gegenstand an dieser Stelle weiter einzugehen.

fließenden alternirenden Ströme, 2. die Trägheit des Magnets, 3. die Luftreibung, so kann man die Differentialgleichung der Bewegung des Magnets (durch sein Trägheitsmoment dividirt gedacht) in folgender Form schreiben:

$$(11) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + a \frac{d\theta}{dt} = gi.$$

Hier ist θ der Ablenkungswinkel aus der Ruhelage, a und g zwei Constanten, deren erstere von der Luftreibung, deren zweite von der Zahl und Anordnung der Drahtwindungen abhängt; die Stromintensität i ist hier eine bestimmte Function der Zeit, welche durch Gl. (6) gegeben ist.

Integrirt man diese Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Gl. (1) und (5), und nennt man $-a\theta_0$ und B die beiden Integrationsconstanten, so erhält man schliesslich:

$$(12) \quad \theta - \theta_0 = Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \operatorname{Sn}\left(\frac{\pi}{\tau}t + \gamma - \delta\right) + Be^{-at}.$$

Der Kürze wegen ist hier:

$$A = -gc v_0 \frac{\tau}{\pi} \cdot \frac{Cs\gamma}{Cs\delta}, \quad \gamma = \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{a\tau}{\pi} - \frac{\lambda}{\pi}\right)$$

gesetzt. Nimmt man die Ruhelage des Magnets zum Anfang des Winkel θ , so ist offenbar $\theta_0 = 0$.

Die Gleichung (12) stellt eine gedämpfte Sinuscurve dar, deren Axe aber nicht durch eine gerade Linie, sondern durch die Exponentialcurve Be^{-at} gebildet wird. Die Erfahrung zeigte mir jedoch, dass, vom ersten Maximum an, diese Axe in meinem Apparate nicht merklich von einer verticalen Geraden abwich. Dies kann von zwei entgegengesetzten Ursachen herrühren; entweder ist der Luftdämpfungscoefficient a sehr gross, oder er ist sehr klein. Ich vermurthe, dass die zweite Hypothese die richtigere ist. Wie dem aber auch sei, so sieht man doch, dass unsere Curve vom ersten Maximum an mit grosser Annäherung als eine gedämpfte Sinuscurve mit gerader Axe, also in der That als eine graphische Darstellung der durch Gl. (6) dargestellten alternirenden Ströme betrachtet werden kann. Die Phasenverschiebung ändert hier offenbar nichts an der Sache.

Beim Gebrauch dieses Instrumentes muss man sorgfältig

danach sehen, dass der Magnet nur um kleine Winkel aus der Windungsebene der Drahtrollen abgelenkt werde. Treffen ihn die electricischen Schwingungen zufällig in einer stark abgelenkten Lage an, so wird er augenblicklich entmagnetisirt, oder es wird sein Magnetismus derart geschwächt, dass ein weiteres Arbeiten ohne neue Magnetisirung unmöglich wird. Bezüglich einiger weiteren praktischen Anweisungen zum Gebrauch dieses Oscillometers, namentlich zur Vermeidung der störenden Unregelmässigkeiten in der Bewegung des Magnets, muss ich auf die Originalabhandlung verweisen.

C. Das Gasflammenoscillometer¹⁾ (Fig. 19). Die Einrichtung des Instrumentes beruht auf dem Gebrauch der König'schen manometrischen Kapseln und Gasflammen. Der bewegliche Theil derselben ist ein sehr leichter ringförmiger Stahlmagnet, welcher auf die Membran einer Kapsel aufgeklebt ist. In der Figur ist er punktirt in *ns* abgebildet. Er befindet sich zwischen den Polen zweier hufeisenförmiger, durch eine Schlittenvorrichtung und die Schrauben L_1 und L_2 verschiebbarer Electromagnete B_1B_2 und B_3B_4 . Der innerhalb der Drahtspiralen befindliche Kern dieser Magnete besteht aus Bündeln von dünnem, gut lackirtem Eisendraht, auf deren Enden Eisenringe mit den entsprechenden Vorsprüngen $a_1a_2a_3 \dots$ aufgesetzt sind, welche einander gegenüberstehen, und zwischen denen die Pole des Ringmagnets liegen. Die Drahtverbindungen sind derart, dass wenn die Pole a_1a_2 des ersten Electromagnets den Ring anziehen, das andere Paar ihn abstösst und umgekehrt. Werden nun durch die Electromagnete alternirende Ströme hindurchgesandt, so wird der Ringmagnet eine oscillatorische Bewegung erhalten und sie durch Vermittelung der Membran auf die Gasflamme übertragen.

So einfach das Princip des Apparates ist, so ist es mir doch nur erst nach langem Probiren gelungen, die endgültige in Fig. 19 abgebildete Form desselben festzustellen. Dieser Apparat ist sehr geeignet, die electricischen Schwingungen einem grösseren Auditorium zu demonstrieren, doch

1) Der Apparat ist für mich von Hrn. Tscheparin, Universitätsmechaniker in Kasan, ausgeführt worden.

sind seine Angaben viel weniger zuverlässig als die des oben beschriebenen Spiegeloscillometers; man muss sehr sorgfältig alle Einzelheiten seiner Wirkung studiren, um sicher zu sein, durch dieselben nicht in Irrthum geleitet zu werden. Es ist nämlich sehr schwer, die eigenen, durch die Elasticität bedingten Schwingungen der Membran völlig zu vermeiden. Ist die Membran dick oder stark gespannt, so erhält man bei Betrachtung der Flamme im rotirenden Spiegel sehr elegante Curven, welche aber mit den electrischen Schwingungen eigentlich nichts zu thun haben, denn nur der Anfangsimpuls wird durch letztere ertheilt, die Hauptschwingungsperiode hängt aber ausschliesslich von der Elasticität der Membran ab. Die Spannung einer dünnen Membran durch den einseitigen Druck des Gases ist genügend, um das Phänomen hervorzurufen. Zur möglichen Vermeidung dieser Uebelstände besteht die Gaskammer *C* des Apparates aus zwei Hälften, die durch eine äusserst dünne, ganz schwach gespannte Kautschukmembran mit aufgeklebtem Ringmagnet voneinander geschieden sind; seitlich sind sie durch zwei dickere Kautschukplatten verschlossen. Das Leuchtgas dringt durch die Röhre *E*, welche einen etwa 15 mm langen capillaren Theil hat, in die eine Hälfte der Kammer ein und strömt durch die Brennröhre *F* aus. Die andere Hälfte steht durch eine sehr feine hufeisenförmige Capillarröhre *K* mit der ersten in Verbindung, sodass im Ruhezustande von beiden Seiten der Membran derselbe Druck herrscht. Ausserdem communicirt diese zweite Hälfte durch eine ziemlich weite Röhre *D* mit einem geschlossenen geräumigen Behälter, wodurch ein Ausweichen des Gases aus dieser Abtheilung während der Schwingungen der Membran ermöglicht wird. Die Einrichtung des Brenners *F* bietet einige Eigenthümlichkeiten dar. Er besteht nämlich, ganz ähnlich dem eines gewöhnlichen Gasgebläses aus zwei concentrischen Röhren; nur strömt hier das Leuchtgas durch die innere Röhre, während durch die äussere ein Strom Sauerstoffgas geleitet wird. Das Leuchtgas verbrennt so in einer Atmosphäre von Sauerstoff; die Verbrennung wird dadurch viel vollständiger, und man erhält im rotirenden Spiegel Curven von ausgezeichnete

Reinheit und Schönheit, in welchen die geringsten Details ihrer Umrisse sichtbar sind.¹⁾ Bei messenden Versuchen beobachtete ich diese Curven mit einem Fernrohr, dessen Fadenkreuz, dem in einem astronomischen Rohre ähnlich, mehrere verticale Fäden besass. Damit der Anfangspunkt der Curve stets seine Stellung im Gesichtsfelde beibehielt, geschah die Stromunterbrechung automatisch auf eine der oben beschriebenen sehr ähnliche Weise. Auf die Axe des rotirenden Spiegels war ein vorspringendes Metallstück aufgesetzt, welches bei jeder Umdrehung auf das eine Ende eines Winkelhebels anschlug, wodurch das andere Ende aus einer mit Weingeist gefüllten Schale mit Platinboden herausgehoben, und der den Stromdurchgang vermittelnde Contact unterbrochen wurde.

Bei der Handhabung dieses Instrumentes ist zu beachten, dass die beiden Electromagnete stets symmetrisch gegen den Ringmagnet angeordnet seien. Ist dies nicht der Fall, so inducirt der näherstehende Magnet temporären Magnetismus in dem Ringe, wodurch die Bewegung des letzteren einen ganz anderen Charakter erhält, und auch sein permanenter Magnetismus sehr bald verschwindet oder geschwächt wird. Die Theorie des Apparates lässt sich auf die des vorhergehenden

1) Ich empfehle ganz besonders diese Einrichtung für akustische Versuche. An den parabolischen Schalltrichter eines sogenannten Scott'schen Phonographen brachte ich eine Kapsel mit einem solchen Brenner an. Die geringsten Unterschiede in der Klangfarbe verschiedener Töne konnten auf diese Weise beobachtet werden. Die Curven der verschiedenen Vocale konnte man in ausgezeichneter Schönheit erhalten; ganz feine Unterschiede in der Klangfarbe, wie z. B. die Verschiedenheit zwischen Bruststimme und Kopfstimme, oder das Singen desselben Tones durch zwei verschiedene Personen entgingen nicht der Beobachtung; bei Orgelpfeifen konnte man die allmähliche Intensitätszunahme der Obertöne bei Verstärkung des Windes sehen u. s. w. Das Zuflussrohr des Gases zur Kapsel hatte, wie oben erwähnt, einen capillaren Theil, während die Brennröhre selbst verhältnissmässig weit war und nur am einen Ende in einer nadelfeinen Oeffnung mündete. Der Druck des Leuchtgases darf nicht zu gross sein, und den Zufluss des Sauerstoffs muss man so reguliren, dass die blaue Flamme nur einen ganz kleinen dunkelrothen Saum habe; dann springen bei jeder Druckvergrösserung rothe Flammen aus dem Brenner hervor, und man erhält eine dunkelrothe Curve auf bläulichem Grunde.

den zurückführen, wenn man von diesen, vom temporären Magnetismus herrührenden Störungen absieht und das magnetische Feld innerhalb der Grenzen, in welchen der Ringmagnet oscillirt, als homogen betrachtet. Nur haben wir es hier statt mit einer Rotationsbewegung mit einer Translation, nämlich einer Schwingungsbewegung parallel einer gewissen Geraden zu thun. Ich will noch bemerken, dass auch dieser Apparat nur bei langsamen Schwingungen zu gebrauchen ist.

Ausser den zwei beschriebenen Oscillometern habe ich noch einen Apparat construiert, dessen Einrichtung im wesentlichen die folgende war. Eine evacuirt Glaskugel mit Electroden befand sich zwischen zwei Drahtrollen, welche in den Schliessungskreis der alternirenden Ströme eingeschaltet waren. Die Electroden der Kugel communicirten mit den Polen einer Holtz'schen Maschine oder eines Inductionsapparates mit schnell wirkendem Unterbrecher. Es war zu erwarten, dass die alternirenden Ströme auf den Lichtbogen in der Glaskugel eine electrodynamische Wirkung ausüben würden, wie es in anderen analogen Fällen geschieht. In dem von mir construirten Apparat war leider diese Wirkung zu schwach, um eine praktische Verwendung dieser Versuchsmethode zu gestatten; doch glaube ich, dass ein auf diesem Princip basirtes Instrument, bei zweckmässiger Einrichtung, den anderen nicht nachstehen würde. Eine Eigenthümlichkeit desselben besteht darin, dass der bewegliche Theil, nämlich der Lichtbogen, so gut wie gar keine Masse besitzt.

§ 5. Die bisher beschriebenen Versuchsmethoden hatten hauptsächlich zum Zweck, die Periode der electricen Schwingungen zu bestimmen. Ich muss schliesslich ein Paar Worte über die Messung des Dämpfungscoefficienten oder des logarithmischen Decrements hinzufügen. Eine grobe Schätzung der Abnahme der Schwingungsamplitude lässt sich zwar schon an den beschriebenen Instrumenten machen, doch sind sie zur genauen Messung der Dämpfung wenig geeignet. Ich suchte daher selbstständige und genaue Methoden zur Bestimmung des Schwingungsdecrements zu finden. Meine Versuche in dieser Richtung musste ich leider aus zeitigem Mangel an passenden Apparaten, deren Her-

stellung die Kunst eines geübten Glasbläfers beanspruchte, unterbrechen. Ich hoffe sie wieder vorzunehmen, sobald die nöthigen Hilfsmittel in meine Hände gelangt sind, und begnüge mich, einstweilen hier kurz das Princip der Methode anzudeuten, vermitteltst deren ich zum Ziele zu gelangen glaube. Meine Versuche beziehen sich auf Entladungen von Leydener Flaschen und Batterien, d. h. auf den Fall, wo in dem Schliessungskreise eine Funkenstrecke enthalten ist.

Ein bekannter Apparat ist das sogenannte „electrische Ventil“, beschrieben von Gaugain, Poggendorff, Holtz u. a.¹⁾; es lässt die electriche Entladung nur in einer bestimmten Richtung, nicht aber in der entgegengesetzten durchgehen. Denken wir uns nun, dass der Entladungskreis einer Leydener Flasche verzweigt sei, und dass die beiden Zweige zwei ganz gleiche Rollen eines Wiedemann'schen Galvanometers enthalten. Sind die Rollen so eingeschaltet, dass ihre Wirkungen auf den Magnet einander verstärken, so erhält man einen bestimmten Ausschlag, welcher der gesammten sich entladenden Electricitätsmenge proportional ist; schaltet man aber die Rollen so ein, dass sie einander entgegenwirken, so ist der Ausschlag Null. Schliessen wir nun in die beiden Zweige zwei entgegengesetzt gerichtete electriche Ventile ein, so ist leicht zu begreifen, dass dann die Wirkung der beiden Rollen der arithmetischen Summe der Electricitätsmengen aller Ströme proportional sein wird, denn entgegengesetzt gerichtete Ströme gehen dann durch verschiedene Rollen. Der Ausschlag wird im allgemeinen viel grösser als im ersteren Falle sein.²⁾

In der That, nennen wir Q_1 die Gesammtmenge der Electricität, welche den Entladungsströmen, Q_2 die, welche den Ladungsströmen entspricht, so haben wir nach dieser Definition:

$$Q_1 = \int_0^{\pi} i dt + \int_{2\pi}^{3\pi} i dt + \dots \quad Q_2 = \int_{\pi}^{2\pi} i dt + \int_{3\pi}^{4\pi} i dt + \dots$$

oder nach Benutzung von Gl. (1) und einigen Umformungen:

1) Siehe Wiedemann, *Electricität* 4. p. 474 u. folg.

2) Auf diese Thatsache hat schon Feddersen aufmerksam gemacht. Pogg. Ann. 115. p. 336. 1862; Vgl. auch Riess, Paalzow u. a. Wiedemann, *Electricität* 4. p. 162.

$$Q_1 = cv_0 \frac{1}{1 - e^{-\lambda}},$$

$$Q_2 = -cv_0 \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Die algebraische Summe dieser beiden Grössen ist gleich cv_0 , der Ladung der Flasche, die arithmetische Summe jedoch gleich:

$$cv_0 \frac{1 + e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Der Werth dieses letzten Ausdrucks ist stets grösser, als cv_0 . Misst man den entsprechenden Ausschlag am Galvanometer, dessen Reductionsfactor als bekannt vorausgesetzt wird, und bestimmt man ausserdem die Grösse cv_0 , indem man z. B. ein zweites Galvanometer in den unverzweigten Theil der Leitung einschaltet, so erhält man schliesslich einen Ausdruck, der keine unbekannten Grössen ausser λ enthält, und aus welchem letzteres bestimmt werden kann.

Im Vorhergehenden haben wir vorausgesetzt; erstens dass die Entladung der Flasche vollständig erfolgt; ist dies nicht der Fall, so lässt sich eine entsprechende Correction leicht anbringen, wenn man die Grösse und das Vorzeichen der rückständigen Ladung kennt; zweitens, dass die electrischen Ventile die entgegengesetzten Ströme vollständig voneinander isoliren; und drittens, dass das Vorhandensein einer Funkenstrecke einem supplementären, und zwar constanten Widerstande äquivalent ist, nicht aber die Einführung einer neuen electromotorischen Kraft in den Schliessungskreis bedeutet. Die letztgenannte Annahme ist bekanntlich von Edlund gemacht worden. Ich glaube, dass uns die electrischen Schwingungen ein Mittel in die Hände geben, die Richtigkeit derselben einer experimentellen Prüfung zu unterwerfen; auf diesen Gegenstand hoffe ich in einer besondern Abhandlung zurückzukommen.

Die Bestimmung von λ nach der beschriebenen Methode habe ich aus oben erwähntem Grunde nicht vornehmen können; einige Versuche, die ich anstellte, zeigten mir nämlich, dass die electrischen Ventile (Holtz'sche Röhren), die mir zu Gebote standen, schlecht eingerichtet waren und die entgegengesetzten Entladungen nicht in genügender Weise voneinander isolirten. Qualitativ zeigte das Resultat den erwarteten Verlauf.

teten Charakter, doch war an messende Versuche nicht zu denken. Mit besseren Apparaten hoffe ich auch bessere Resultate zu erzielen.

Ich habe unterdessen versucht, die im vorliegenden ersten Theil dieser Abhandlung beschriebenen Methoden zur experimentellen Untersuchung einiger Fragen aus dem Gebiete der Electricitätslehre zu verwerthen. So wird der zweite Theil eine Anwendung derselben auf die Bestimmung des Verhältnisses zwischen der electrostatischen und electromagnetischen Einheit der Electricitätsmenge enthalten. Weitere Anwendungen sollen in späteren Abhandlungen folgen.

Phys. Laboratorium der Univ. Kasan, April 1885.

VIII. *Bestimmung der Constante für die electromagnetische Drehung der Polarisationssebene des Natriumlichtes in Schwefelkohlenstoff;*
von Adolf Koepsel.

(Inauguraldissertation.)

(Hierzu Taf. IV Fig. 20.)

Die Bestimmungen der Constante für die electromagnetische Drehung der Polarisationssebene des Lichtes im Schwefelkohlenstoff, welche bis jetzt gemacht worden sind¹⁾, konnten noch nicht als eine befriedigende Lösung dieser Aufgabe betrachtet werden, da die Resultate der einzelnen Beobachter so bedeutende Abweichungen zeigten, dass es wünschenswerth erschien, die Messungen zu wiederholen.

Von diesem Gefühl geleitet, nahm Hr. Arons²⁾ eine neue Bestimmung dieser Constante vor, und es muss nur bedauert werden, dass er vor den Schwierigkeiten, welche Schwefelkohlenstoff der Genauigkeit der Messungen entgegensetzt, zurückschreckte und an seine Stelle destillirtes Wasser setzte, welches ja ein optisch homogeneres Mittel ist. Er

1) Gordon, Phil. Trans. 1. p. 1. 1877. H. Becquerel, Ann. de chim. et de phys. 27. p. 312. 1882. Beibl. 2. p. 257; 5. p. 873, 897; 7. p. 623. Lord Rayleigh, Proc. of the Roy. Soc. 37. p. 146. 1884. Beibl. 9. p. 58.

2) Arons, Wied. Ann. 24. p. 161. 1885.

hat dadurch einen directen Vergleich seiner Messungen mit denen der übrigen Beobachter unmöglich gemacht, und eine aus dieser Messung abgeleitete Drehung für Schwefelkohlenstoff kann nur auf das Maass von Genauigkeit Anspruch machen, mit welcher das Verhältniss der Drehungsvermögen beider Stoffe bestimmt ist.

Wenn man auch zugeben muss, dass der Schwefelkohlenstoff schwieriger zu behandeln ist, als Wasser, wegen der Schlierenbildung, die sich, worauf ich später zurückkommen werde, bei ganz geringen Temperaturunterschieden sofort bemerkbar macht, so ist es doch eine nicht zu unterschätzende, vortheilhafte Eigenschaft dieses Stoffes, dass er ein über dreimal grösseres Drehungsvermögen besitzt, als Wasser. Es ist dies um so beachtenswerther, als man selbst mit den vollkommensten Halbschattenpolarimetern bis jetzt wohl nicht über eine Genauigkeit von $0,01^\circ$ der Einstellung hinauskommt. Man hat also, wenn man diese Methode der Messung electricischer Ströme anwenden will, neben der Reinheit des angewendeten Stoffes vor allem auf ein möglichst grosses Drehungsvermögen zu achten. Da nun Schwefelkohlenstoff dies letztere in hohem Maasse besitzt, ferner sich ohne grosse Schwierigkeit rein darstellen lässt, und da sich, wie ich später zeigen werde, auch die Schlierenbildung durch geeignete Construction des Apparates und zweckmässige Anordnung des Versuchs vollständig vermeiden lässt, so muss man Schwefelkohlenstoff zu dieser Art der Messung electricischer Ströme für geeigneter halten, als irgend einen anderen Stoff, der nicht neben den beiden anderen Eigenschaften noch die eines grösseren Drehungsvermögens besitzt.

Da also, wie oben erwähnt, die bisher ausgeführten Messungen noch nicht die zu fordernde Uebereinstimmung zeigten, unternahm ich auf Wunsch des Hrn. Geheimraths Prof. Dr. v. Helmholtz, diese Constante nochmals zu bestimmen, und zwar durch directe Vergleichung mit dem Silbervoltameter. Eine solche directe Vergleichung ist meines Wissens von keinem der genannten Beobachter ausgeführt worden. Man erreicht dadurch den Vorthail einer sehr genauen Strommessung, verbunden mit einer vollständigen Un-

abhängigkeit vom Erdmagnetismus, dessen Störungen sich ja bei den meisten electrischen Messungen unangenehm fühlbar machen. Ausserdem war das electrochemische Aequivalent des Silbers von Hrn. Kohlrausch¹⁾ mit grosser Genauigkeit bestimmt, und diese Bestimmung wurde in jüngster Zeit von Lord Rayleigh und Mrs. Sidgwick²⁾ bestätigt. Beide Resultate weichen nur um 0,04 Proc. voneinander ab.

Bei Ausführung meiner Versuche im hiesigen physikalischen Laboratorium unterstützte mich Hr. Geheimrath Prof. Dr. v. Helmholtz in der freundlichsten Weise, und ich möchte es nicht unterlassen, für die Anregung zu vorliegender Arbeit, für die rege Theilnahme, die er dem Verlaufe derselben widmete, sowie für die Bereitwilligkeit, mit welcher er jeden meiner Wünsche gütigst erfüllte, ihm an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank zu sagen.

Apparate.

Die Bestimmungen der Drehung der Polarisationssebene wurden mit einem Lippich'schen Halbschattenpolarimeter gemacht, welches in der optischen Werkstatt von Franz Schmidt und Haensch in Berlin nach den Angaben des Hrn. Geheimrath v. Helmholtz eigens zu diesem Zweck angefertigt wurde, und dessen Einrichtung folgende war. (Siehe Fig. 20).

An zwei starken Metallplatten *M*, die durch vier massive Messingstangen *S* von ungefähr 1,5 cm Durchmesser und 1 m Länge verbunden waren, war einerseits der Polarisator *P*, andererseits der Analysator *A* mit dem Theilkreis befestigt, welcher letzterer gestattet, die Drehungen mittelst Nonius und Lupe bis auf 0,01° abzulesen.

Der Polarisator *P* war folgendermassen construirt. In der Fassungsröhre desselben befanden sich zwei Glan'sche Prismen hintereinander liegend, *G*, *G'*; das eine von beiden *G'* war seitlich verschoben, und zwar so, dass seine Endfläche diejenige des anderen *G*, dessen Längsaxe mit der Röhrenaxe zusammenfiel, zur Hälfte deckte; letzteres war drehbar

1) F. u. W. Kohlrausch, Exner's Rep. d. Phys. 20. H. 4. 1884.

2) Lord Rayleigh u. Sidgwick, Phil. Trans. 2. 1884. s. auch Beibl. S. p. 530.

um seine Längsaxe, durch welche Einrichtung eine variable Neigung der Hauptschnittsebenen ermöglicht wurde. Hierdurch erreicht man den Vortheil einer veränderlichen Empfindlichkeit. Ferner enthielt die Fassungsröhre ein Linsensystem L , welches bestimmt war, die einfallenden Lichtstrahlen parallel zu richten; sowie zwei seitlich verschiebbare Diaphragmen D , deren eines mit einer Platte von doppeltchromsaurem Kali versehen war, um, wenn nöthig, das Licht dadurch homogener zu machen.

Als Analysator diente ebenfalls ein Glan'sches Prisma G_2 mit einem Fernrohr F .

Für die genauere Kenntniss dieser und ähnlicher Apparate verweise ich auf die Abhandlungen von Hrn. F. Lippich: Ueber ein Halbschattenpolarimeter¹⁾ und: Ueber polaristrobometrische Methoden²⁾, und von Hrn. H. Landolt: Neuerungen an Polaristrobometern.³⁾

Die beiden Röhren, welche das optische System enthielten, gingen durch die Metallplatten MM hindurch und ragten auf der anderen Seite noch drei bis vier Centimeter darüber hinaus, hier waren sie schräg abgeschnitten, so dass auf die dadurch gebildeten cylindrischen Theile C die Röhre, welche den Schwefelkohlenstoff enthielt, mit ihren Enden aufgelegt werden konnte. Die aufschraubbaren Deckel D der letzteren hatten einen ebenso grossen Durchmesser, wie die Oeffnung der Fassungsröhre des optischen Systems, sodass die Axe der Röhre mit der Axe des optischen Systems zusammenfiel.

Die Röhre selbst war aus Messing angefertigt, 1 m lang und ihrer ganzen Länge nach von einem weiteren Messingrohr umgeben, welches zur Wasserspülung diente; dieses hatte an den Enden je zwei Ansätze Tt , von denen die einen T zum Zu- und Abfluss des Wassers dienten; die anderen, etwas weiteren t , waren zu Thermometern bestimmt, welche die Temperatur des Kühlwassers anzeigen sollten. An den Enden war die Röhre sorgfältig senkrecht zur Axe abge-

1) F. Lippich, Naturwiss. Jahrb. „Lotos“. N. F. 2. Prag 1880.

2) F. Lippich, Wien. Ber. II. 85. Febr. Heft. 1882.

3) H. Landolt, Zeitschr. f. Instrumentenk. 3. p. 121. 1883. Beibl. 7. p. 863.

V
2
61
8
8
5

XUM

schliffen, und an diese Schliffflächen wurden mittelst der aufschraubbaren Deckel *D* dünne planparallele Glasplatten mit Hilfe von Gummiringen nicht zu fest angepresst. Ausserdem trug die Röhre am Ende einen ebenfalls verschraubbaren trichterförmigen Ansatz *U*, welcher durch die Spülröhre hindurch mit dem innersten Hohlraum in Verbindung stand. Dieser Ansatz hatte erstens den Zweck, etwa bei der Füllung zurückgebliebene Blasen durch Nachfüllen zu beseitigen, und zweitens ein etwaiges Springen der Röhre, durch Ausdehnung des Schwefelkohlenstoffs, zu verhüten, indem über der Flüssigkeitsoberfläche im Trichter immer noch eine Luftblase sich befand, deren Luft also bei zu starker Ausdehnung des Schwefelkohlenstoffs nur ein wenig comprimirt wurde.

Zur Erzeugung des Natriumlichtes, welches bei hoher Empfindlichkeit des Apparates eine bedeutende Intensität haben muss, diente die Landolt'sche Natriumlampe, deren genaue Beschreibung man in der „Zeitschrift für Instrumentenkunde“ 4. p. 390 findet. Es hat sich diese Lampe als sehr zweckmässig, bequem und zuverlässig erwiesen.

Die Drahtrolle, welche zur Erzeugung eines intensiven magnetischen Feldes dienen sollte, wurde nach meinen Angaben von dem Mechaniker des hiesigen physikalischen Instituts auf das sorgfältigste gewickelt. Sie erhielt 5250 Windungen zweier 1 mm starken Drähte, welche parallel nebeneinander gewickelt wurden. Der Draht war sorgfältig mit Seide übersponnen und wurde vor dem Wickeln noch mit Schellackfirniss überzogen, und zwar so, dass dieser Ueberzug beim Aufwickeln schon völlig trocken war. Durch diese Art der Isolirung wurde eine besondere der einzelnen Lagen, etwa durch zwischengelegtes Papier oder Guttapercha, unnöthig, und es wurde dadurch erreicht, auf einen möglichst kleinen Raum möglichst viel Windungen mit minimalem Widerstande zu bringen; auch erlangt man hierdurch den Vortheil, dass der Ausdruck für den Correctionsfactor eine einfachere Form erhält, indem auf die Einheit der Länge der Rolle nahe ebenso viel Windungen kommen, wie auf die des Durchmessers.

Die Rolle hatte folgende Dimensionen:

Innerer Radius . . . $\varrho_1 = 1,45$ cm.

Aeusserer Radius . . . $\varrho_2 = 4,86$ "

Länge $2a = 19,80$ "

Widerstand des einen Zweiges . $A_1 E_1 = 12,5$ S.-E.

Widerstand des anderen Zweiges $A_2 E_2 = 13,7$ "

Die Endscheiben waren kreisrunde Platten aus Buchsbaumholz von solchem Durchmesser, dass, wenn sie auf den oben erwähnten Messingstangen sauklagen, die Axe der Röhre mit der Axe der Rolle zusammenfiel. Der innere Durchmesser der letzteren war so gewählt, dass die Rolle die Spülröhre eng umschloss. Um nun die gefüllte Röhre durch die Oeffnung der Rolle hindurchzubringen, war der vorderste Deckel D bis auf die Grösse des Durchmessers der Oeffnung etwas conisch abgedreht, und das abgedrehte Stück wurde durch einen abnehmbaren, innen conischen Ring ergänzt, welcher nachträglich wieder aufgesetzt wurde. Aus demselben Grunde waren die Tuben an der Spülröhre, welche für den Zufluss des Wassers und für das Thermometer bestimmt waren, in die Spülröhre eingeschliffen und konnten also ebenfalls mit Leichtigkeit entfernt werden.

Da die Rolle ein ziemlich beträchtliches Gewicht hatte, so wurde, um eine Durchbiegung der Messingstangen und eine dadurch herbeigeführte Verschiebung der Axen des optischen Systems und Durchbiegung der Messingröhre zu verhindern, in der Mitte unter der Rolle eine mittelst Schraube verstellbare Stütze angebracht.

Zur Erzeugung des electricen Stromes dienten je nach Bedürfniss sechs bis dreiundzwanzig Grove'sche oder sechs Daniell'sche Elemente. Für erstere wurde immer frische Säure angewendet, um bei möglichst grosser Intensität eine möglichst gute Constanz des Stromes zu erzielen. Bei den Daniell'schen Elementen habe ich in der letzten Zeit chemisch reine Schwefelsäure angewendet und hierdurch eine ganz bedeutende Constanz des Stromes erzielt, zumal wenn die Säule auf das Maximum ihrer electromotorischen Kraft gekommen war. Ueberhaupt habe ich gefunden, dass die Messungen auch bei schwächeren Strömen, also kleineren

war, zeigte sich, als die Röhre in den Apparat eingelegt wurde, an der bedeutend grösseren Intensität des Gesichtsfeldes gegen früher. Hierdurch wurde es ermöglicht, bei geringerer Intensität mit grösserer Empfindlichkeit des Apparates zu beobachten.

Als eine andere Nothwendigkeit, um die Beobachtungen zuverlässig und sicher ausführen zu können, musste die erachtet werden, während der Dauer des Versuchs ein klares und scharfes Gesichtsfeld zu haben. Ein sicheres Kennzeichen dafür war, dass man den Trennungsstrich, welcher die beiden auf gleiche Helligkeit einzustellenden Felder schied, während der ganzen Beobachtung scharf sah, ohne das Ocular zu verstellen. Es war dies eine schwierige Aufgabe, da sich bald zeigte, dass schon ganz geringe Temperaturdifferenzen, welche ich auf unter $0,1^{\circ}$ C. schätze, eine Schlierenbildung veranlassten, die eine Unklarheit des Gesichtsfeldes erzeugte, wodurch eine genaue Einstellung veritelt wurde.

Es kann dies verglichen werden mit einer gleichen Erscheinung, welche sich bei astronomischen Beobachtungen störend bemerkbar macht, nämlich bei den Beobachtungen mit dem Refractor oder Meridianinstrument, nur dass die Störungen in unserem Falle noch viel empfindlicherer Natur zu sein scheinen, da sie sich zeigen, ohne dass man es mit so colossalen Vergrösserungen, wie sie dort vorkommen, zu thun hat. Dort ist es die Schlierenbildung der Luft, welche stört, und man vermeidet dieselbe, indem man dafür sorgt, dass der Beobachtungsraum dieselbe Temperatur besitze, wie der äussere Raum.

Eine Wasserspülung mittelst der Wasserleitung, welche angewendet wurde, um diesen Uebelstand zu beseitigen, erwies sich als ungenügend; ich nahm eine Bestimmung der Temperaturdifferenz des aus- und einströmenden Wassers vor, und es zeigte sich, dass dieselbe $0,6^{\circ}$ C. betrug. Hierbei war das Bild nach oben verschoben und vollständig verzerrt und unklar, sodass an eine Einstellung auf gleiche Helligkeit beider Felder überhaupt nicht zu denken war.

Ich beschloss deshalb, Wasser von Zimmertemperatur

anzuwenden, bei dem diese Differenz ja fortfallen musste; zu diesem Zwecke wurde ein grosser Glasballon mit Wasser gefüllt und auf die Zimmertemperatur gebracht. Dasselbe liess ich dann mittelst Hebers durch die Spülröhre in einen zweiten unten aufgestellten Ballon abfliessen, welcher, nachdem der erstere geleert war, gegen denselben ausgewechselt wurde.

Hierdurch erhielt ich für einige Zeit ein scharfes Bild, doch auch jetzt noch zeigte sich nach und nach ein Verwischen desselben. Dies lag daran, dass die grosse Natriumflamme, welche zur Beobachtung nöthig war, obgleich von einem Schirm umgeben, doch noch soviel Wärme gegen die Beobachtungsröhre ausstrahlte, dass dadurch eine wenn auch geringe Temperaturdifferenz des aus- und einströmenden Spülwassers bewirkt wurde. Ich machte deshalb diese Strahlung durch einen vorgesetzten doppelten Pappschirm unmöglich, welcher nur an der Stelle eine kleine Oeffnung besass, wo die Lichtstrahlen in den Apparat eindringen mussten.

Durch diese Maassregel besserte sich die Sache schon bedeutend, und ich erhielt ein Bild, welches während der Dauer von ungefähr zehn Minuten vollständig scharf blieb; nach Verlauf dieser Zeit jedoch trat eine anfangs zwar unmerkliche, nach und nach aber sich steigernde Unklarheit des Bildes auf, welche unbedingt beseitigt werden musste. Diese Erscheinung konnte nur von der Erhöhung der Zimmertemperatur durch die grosse Natriumflamme herkommen, welcher Erhöhung die thermisch träge Wassermasse nicht nachkommen konnte; infolge wovon sich bald die schon mehrfach erwähnte Temperaturdifferenz wieder herstellte.

Zur Beseitigung dieses Uebelstandes umbüllte ich die Beobachtungsröhre dicht mit Watte, wodurch ich auf ungefähr eine halbe bis dreiviertel Stunden ein vollständig scharfes Bild erhielt, wenn ich dabei einen kleinen Kunstgriff gebrauchte. Dieser bestand darin, dass ich die Fenster des Beobachtungsraumes vorher solange öffnete, bis die Temperatur desselben um soviel unter die des Spülwassers gesunken war, als sie nach Beendigung des Versuchs sich über derselben befand. Dadurch wurde die Temperaturdiffe-

renz auf ein Minimum reducirt und die Schlierenbildung während der Beobachtungszeit vollständig beseitigt, sodass die Beobachtung ohne irgend welche Störung von dieser Seite gemacht werden konnte.

Nachdem so die Hauptschwierigkeiten gehoben waren, fragte es sich, ob nicht durch die Erwärmung, welche von der stromdurchflossenen Drahtrolle ausgehen musste, neue Hindernisse entstehen würden. Ich liess deshalb, indem die Röhre in der oben beschriebenen Weise gekühlt wurde, Ströme von verschiedener Intensität durch die Rolle gehen und fand, dass selbst bei den stärksten Strömen, die ich anwendete — bis ungefähr 3 Ampère — die Schlierenbildung durch schnelleres Ausfliessen des Spülwassers beseitigt werden konnte. Desshalb fertigte ich mir Ausflussröhren von Glas an, deren Oeffnungen verschiedene Querschnitte besaßen, so dass der Ballon beim kleinsten Querschnitt der Ausflussröhre in ungefähr zwei Stunden, beim grössten in einer halben Stunde ausfloss, ich es also in der Gewalt hatte, je nach der Stärke der angewendeten Ströme das Spülwasser langsamer oder schneller ausfliessen zu lassen. Dass die Erwärmung durch die Rolle so gering war, lag wohl daran, dass dieselbe auf eine Röhre gewickelt war, die aus vielen übereinander geleimten Papierlagen bestand und also einen sehr schlechten Wärmeleiter bildete, denn sonst hätte sich die Erwärmung der Rolle, die in manchen Fällen sehr bedeutend sein musste, bei der Empfindlichkeit des Schwefelkohlenstoffs für Temperaturunterschiede entschieden störender geltend gemacht.

Versuche.

Bei den Versuchen kam es darauf an, die Intensität des durch die Rolle geschickten Stromes und die Drehung der Polarisationsebene, welche derselbe bewirkte, mit möglichst grosser Genauigkeit zu bestimmen.

Erstere Messung wurde, wie schon erwähnt, mit dem Silbervoltameter ausgeführt, und den Berechnungen wurde das von F. und W. Kohlrausch bestimmte electrochemische Aequivalent des Silbers zu Grunde gelegt, wonach der Strom 1 Ampère in 1 Sec. 1,1183 mg Silber ausscheidet. Bei den

ersten Versuchen wurden zwei Voltameter hintereinander in denselben Stromkreis eingeschaltet, nicht sowohl, um durch den Mittelwerth beider eine grössere Genauigkeit der Strommessung zu erzielen — denn aus früheren von mir gemachten Arbeiten mit dem Silbervoltameter hatte ich erkannt, dass die Uebereinstimmung zweier solcher in denselben Stromkreis eingeschalteter Apparate eine die Grenzen der hier in Betracht kommenden Beobachtungsfehler weit hinter sich lassende ist — als vielmehr um diese meine frühere Beobachtung zu bestätigen, dann aber auch, um etwaige Fehler im Ausspülen und Trocknen der Tiegel entdecken zu können, denn ich konnte annehmen, dass, wenn die beiden Voltameter eine grössere Abweichung vom Mittelwerthe als 0,005 Proc. zeigten, ein solcher Fehler vorgekommen war, dass sie also entweder nicht genügend gewaschen oder nicht genügend getrocknet waren, oder dass Silberkrystalle verloren gegangen waren. Ich werde hierauf später zurückkommen.

Als ich einige Uebung in der Behandlung der Tiegel erlangt hatte, glaubte ich dieser Vorsicht entrathen zu können und wendete immer nur ein Voltameter an, weil ich dann mit dem anderen sofort eine neue Messung vornehmen konnte, ohne die Batterie auseinanderzunehmen.

Um die Drehung zu bestimmen, musste man die beiden halbkreisförmigen Theile des Gesichtsfeldes, welche in der absoluten Nullstellung des Apparates gleiche Helligkeit besaßen und durch die Wirkung des Stromes verschiedene Intensität annahmen, durch Drehung des Analysators wieder auf gleiche Helligkeit bringen. Um dies mit möglichster Genauigkeit ausführen zu können, wurde, wie erwähnt, für absolute Schärfe der Trennungslinie beider Felder während der Beobachtung gesorgt. Ausserdem wurden die Beobachtungen in einem dunkeln Zimmer vorgenommen.

Da nun das Silbervoltameter einen Mittelwerth der Stromstärke während einer bestimmten Zeit angibt, so machte ich, um für die Drehung ebenfalls einen Mittelwerth zu erhalten, während der Dauer des Versuchs fortwährend Ablesungen, und zwar nach Schliessung des Stromes einerseits drei, hierauf wurde der Strom vermittelt eines Pohl'schen Commu-

tators, welcher gestattete, den Strom in der Rolle umzuwenden, ohne eine gleichzeitige Umwendung in den Voltametern zu bewirken, umgekehrt, und nun wurden sechs Ablesungen andererseits gemacht, nach abermaliger Wendung des Stromes wieder sechs und dann wieder sechs andererseits; schliesslich wieder drei auf der Seite, wo die Ablesung begonnen hatte, also nach folgendem Schema:

Links 3 6 3 Rechts 6 6

ähnlich wie bei der Bestimmung des Nullpunktes der Wage. Auch noch andere ähnliche Schemata wurden angewendet. Natürlich wurde die Excentricität des Theilkreises durch Ablesung an zwei diametral gegenüberliegenden Nonien eliminirt. Der Mittelwerth aus allen Ablesungen galt als Drehung während der Dauer des Versuchs. Hierdurch erreichte ich den Vortheil einer Unabhängigkeit vom Nullpunkte des Apparates, selbst wenn sich derselbe während der Dauer des Versuchs verschoben haben sollte, und einer Verkleinerung der Beobachtungsfehler.

Das für die Ablesung nöthige Licht wurde mittelst einer geeigneten Spiegelungsvorrichtung von der Natriumflamme auf die Theilung reflectirt, wodurch ein jäher Helligkeitswechsel zwischen den einzelnen Einstellungen und Ablesungen vermieden wurde, welcher nothwendig zum Nachtheil für erstere auf das Auge eingewirkt hätte.

Da man bei der erwähnten Empfindlichkeit des Schwefelkohlenstoffs für Temperatur-Unterschiede als sicher annehmen konnte, dass bei scharfem Bilde die Temperatur des einfließenden Wassers gleich der des ausfließenden sei, so wurde die Temperaturbestimmung bei Beginn und Schluss nur an dem ausfließenden Wasser vorgenommen, und zwar in folgender Weise: Nach Wegnahme der Ausflussröhre liess ich das Wasser schnell in ein Becherglas von ungefähr $\frac{1}{4}$ l Inhalt fließen; da es jedoch hierbei noch die Wärme der Gefässwände aufnahm, so wurde dieses noch nicht zur Temperaturbestimmung benutzt, sondern erst eine zweite auf dieselbe Weise gewonnene Probe gab durch ein eingesenktes Normalthermometer die Temperatur des Spülwassers an; eine dritte Probe diente zur Controle.

Correctionsfactor.

Bekanntlich ist die Wirkung eines Kreisstromes in Bezug auf eine durch seinen Mittelpunkt gehende unendlich lange Gerade senkrecht zu seiner Ebene vom Radius des Kreises unabhängig und gleich $4\pi J$, wenn J die Intensität des Stromes ist. Hat man nun N solcher Kreisströme, und bezeichnet α die Drehung der Polarisationssebene eines unendlich langen Lichtstrahles, welche durch die Stromeinheit einer Windung hervorgebracht wird, so ist die Drehung R , welche durch N Kreisströme von der Intensität J bewirkt wird:

$$R = 4\pi J N \alpha.$$

Da wir es nun nicht mit unendlich langen, sondern endlichen Lichtstrahlen zu thun haben, so muss diesem Ausdruck ein Correctionsfactor hinzugefügt werden, welcher von der Länge des Strahles, d. h. der Länge der angewendeten Röhre, und von den Dimensionen der Kreisströme, d. h. der Rolle, abhängig ist.

Um diesen Factor zu erhalten, bilde man die Potentialdifferenz des Stromes an der Ein- und Austrittsstelle. Ersetzt man den Kreisstrom durch eine magnetische Doppelschicht in der bekannten Weise, so ist der Magnetismus derselben proportional der Stromintensität. Hat man mehrere Kreiswindungen, so kann man alle durch zwei Magnetschichten ersetzen, die dieselben begrenzen. Sie mögen die Flächendichtigkeiten $+\mu$ und $-\mu$ haben; dann ist:

$$\mu = \frac{J}{\delta},$$

wo δ die Dicke des angewendeten Drahtes bedeutet.

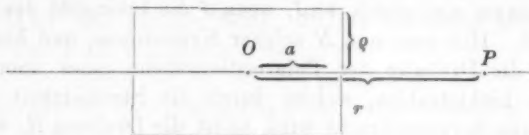
Ist die Länge der Rolle $2a$, so ist:

$$\delta = \frac{2a}{n}, \quad \text{also} \quad \mu = \frac{Jn}{2a}.$$

Das Potential einer Windungsschicht der Rolle ist demnach:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \left\{ \frac{2\pi q \, dq \, \mu}{\sqrt{(r+a)^2 + q^2}} - \frac{2\pi q \, dq \, \mu}{\sqrt{(r-a)^2 + q^2}} \right\} \\ &= \int \left\{ \frac{2\pi q \, dq \, \frac{Jn}{2a}}{\sqrt{(r+a)^2 + q^2}} - \frac{2\pi q \, dq \, \frac{Jn}{2a}}{\sqrt{(r-a)^2 + q^2}} \right\}, \end{aligned}$$

worin ϱ den Radius der Schicht, r den Abstand des Punktes P , in Bezug auf den das Potential genommen ist, von dem Anfangspunkt O der Coordinaten, welcher in der Mitte der Schicht liegend gedacht ist, bedeutet.



Hieraus folgt durch Integration:

$$\varphi = \frac{\pi J n}{a} \left\{ \sqrt{(r+a)^2 + \varrho^2} - \sqrt{(r-a)^2 + \varrho^2} \right\}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in eine Reihe, so ergibt sich, wenn man mit den Gliedern zweiter Ordnung abbricht:

$$\varphi = \frac{\pi J n}{a} \left\{ 2a - \frac{a\varrho^2}{(r+a)(r-a)} \right\} = 2\pi J n - \pi J n \frac{\varrho^2}{r^2 - a^2}.$$

Sind nun mehrere Schichten übereinander gewickelt, und ist m die Anzahl der Lagen, ϱ_2 der Radius der äussersten, ϱ_1 der innersten Lage, so ist:

$$\delta = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{m},$$

also das Potential der ganzen Rolle:

$$\Phi = \int \varphi \frac{d\varrho}{\delta} = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \varphi \frac{m d\varrho}{\varrho_2 - \varrho_1} = 2\pi J n m - \frac{\pi J n m}{3(r^2 - a^2)} \cdot \frac{\varrho_2^3 - \varrho_1^3}{\varrho_2 - \varrho_1},$$

oder, wenn N die Anzahl der Windungen ist:

$$\Phi = 2\pi J N - \frac{\pi J N}{3} \cdot \frac{\varrho_2^3 + \varrho_2\varrho_1 + \varrho_1^3}{r^2 - a^2}.$$

Die Potentialdifferenz ist also:

$$\Phi_{+r} - \Phi_{-r} = 4\pi J N \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{\varrho_2^3 + \varrho_2\varrho_1 + \varrho_1^3}{r^2 - a^2} \right\} = 4\pi J N C.$$

In dem hier zur Anwendung kommenden Falle war:

$$\varrho_1 = 1,45 \text{ cm}, \quad \varrho_2 = 4,86 \text{ cm}, \quad r = 49,97 \text{ cm}, \quad a = 9,90 \text{ cm}.$$

Hieraus ergibt sich der Correctionsfactor: $C = 0,99772$.

Um zu zeigen, dass man bei diesen Dimensionen des Messapparates berechtigt ist, die Reihenentwicklung mit dem zweiten Gliede abubrechen, sei noch der Ausdruck für das dritte Glied gegeben. Derselbe lautet:

$$+ \frac{1}{80} \frac{3r^2 + 2a^2}{(r^2 - a^2)^3} \cdot \frac{\varrho_2^5 - \varrho_1^5}{\varrho_2 - \varrho_1};$$

setzt man hier die Werthe ϱ_2 , ϱ_1 , r und a ein, so ergibt sich der Werth dieses Ausdrucks zu:

$$+0,0000106.$$

Dies würde also zu dem Correctionsfactor noch hinzukommen bei Berücksichtigung des dritten Gliedes der Reihenentwicklung. Es wird sich zeigen, dass dies gerade der mittlere Fehler des von mir erhaltenen Resultates ist, und folglich ist diese Correction bei der einzelnen Beobachtung zu vernachlässigen, weil, wie ich zeigen werde, der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung fünfmal grösser ist.

Da die Drehung, wie Maxwell gezeigt hat¹⁾, proportional ist der eben entwickelten Potentialdifferenz, so ist, wenn man mit R die durch die Stromintensität hervorbrachte Drehung bezeichnet, und α die oben angegebene Bedeutung hat:

$$\alpha = \frac{R}{4\pi JNC}.$$

Ein Reductionsfactor für die Temperatur kommt noch hinzu. Bekanntlich ist das Drehungsvermögen nicht unabhängig von der Temperatur des drehenden Stoffes. Dasselbe nimmt ab mit zunehmender Temperatur. Diese Abnahme ist bei Schwefelkohlenstoff nicht proportional mit der Zunahme der Temperatur. Bichat hat ein Gesetz hierfür aufgestellt, dasselbe lautet:

$$R_\theta = R_0 (1 - 0,00104 \theta - 0,000014 \theta^2).$$

Hierin bedeutet R_0 das Drehungsvermögen bei der Temperatur 0°C. , R_θ dasjenige bei $\theta^\circ \text{C.}$

Mit Hülfe dieser Formel habe ich meine sämmtlichen Messungen auf 18°C. reducirt, und zwar wählte ich diese Temperatur aus dem Grunde, weil Lord Rayleigh, dessen Bestimmungen mir die genauesten zu sein schienen, seine Messungen auf diese Temperatur reducirt hatte. Um also einen directen Vergleich anstellen zu können, traf ich dieselbe Wahl.

1) Maxwell, Treat. on Electr. and Magn. 2. p. 411.

Resultate.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate obiger Messungen zusammengestellt und zur Erklärung derselben sei bemerkt, dass Ag die in der Zeit t niedergeschlagene Silbermenge in Milligrammen ist; J und $2J$ bedeuten die hieraus berechneten Stromstärken in (C.G.S.) ausgedrückt, und zwar bedeutet J , dass in dem betreffenden Versuche die beiden Drähte der Rolle hintereinander geschaltet waren, der Silberniederschlag also durch dieselbe Stromintensität hervorgebracht wurde, welche die Drehung bewirkte; $2J$ dagegen bezeichnet, dass die Drähte der Rolle parallel geschaltet waren, während das Silbervoltameter sich im unverzweigten Stromkreise befand, also zur Erzeugung des Niederschlags die doppelte Stromintensität wirkte, während die Drehung nur durch J hervorgebracht wurde.

Ag	t	J	$2J$	R_m	θ	α	α_θ	α_{18}
mg	sec	(cgs)	(cgs)					
1551,093	1860	0,07457	—	207,060	16,00° C.	0,9969	0,042173	0,042044
3585,759	1260	—	0,25448	351,798	18,10	1,0002	0,042005	0,042013
4185,941	1440	—	0,25994	358,521	18,80	1,0012	0,041908	0,041958
5186,259	1500	—	0,80917	426,690	18,90	1,0014	0,041934	0,041992
651,596	1020	0,05713	—	157,482	19,10	1,0019	0,041883	0,041962
2310,707	1320	—	0,15654	215,700	19,60	1,0028	0,041869	0,041986
3769,542	2220	—	0,15184	210,000	19,15	1,0020	0,042023	0,042107
1354,679	1980	—	0,06118	84,262	20,30	1,0039	0,041847	0,042009
1387,707	1980	—	0,06267	86,218	20,40	1,0040	0,041800	0,041967
1491,206	1860	—	0,07169	98,875	20,40	1,0040	0,041905	0,042073
1656,939	2040	—	0,07263	100,095	20,50	1,0041	0,041875	0,042046
3195,293	1080	—	0,26456	363,892	20,23	1,0038	0,041792	0,041950
1292,223	1620	—	0,07133	98,340	19,03	1,0018	0,041891	0,041966
1713,714	1020	—	0,15024	208,183	17,28	0,9990	0,042103	0,042060
2624,326	1500	—	0,15645	216,468	17,30	0,9990	0,042042	0,041999
2841,295	1680	—	0,15123	209,280	17,37	0,9991	0,042047	0,042009
915,558	660	0,12405	—	343,224	17,48	0,9993	0,042034	0,042004
1458,441	1020	0,12786	—	351,834	19,39	1,0023	0,041805	0,041901
1188,555	840	0,12653	—	349,704	19,78	1,0030	0,041989	0,042115
4957,130	1200	—	0,36939	510,492	18,60	1,0010	0,041990	0,042032
1368,376	900	0,13596	—	375,228	18,34	1,0007	0,041928	0,041957
1057,659	1200	—	0,07882	108,672	18,51	1,0010	0,041895	0,041937

R_m ist das Mittel des Drehungswinkels, in Minuten ausgedrückt, aus allen Ablesungen, die während der Dauer des Versuchs gemacht wurden.

θ ist die Beobachtungstemperatur, α der Reductions-factor auf 18° C.

α_ϕ ist die für die Beobachtungstemperatur berechnete Drehung für die Einheit des magnetischen Feldes eines unendlich langen Strahles, α_{18} dieselbe für die Temperatur von 18°C .

Hiernach wird die vorstehende Tabelle verständlich sein.

Aus derselben folgt als Mittelwerth:

$$\alpha_{18} = 0,042\,004\,0'.$$

Um aus der Uebereinstimmung der einzelnen Resultate ein Urtheil über die wahrscheinliche Fehlergrenze zu gewinnen, will ich hieran eine Fehlerrechnung schliessen.

Ist n die Anzahl der einzelnen Bestimmungen, sind $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n$ die Abweichungen vom arithmetischen Mittel, S die Summe der Fehlerquadrate, also:

$$S = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2,$$

und bezeichnet F_m, F_w den mittleren, resp. wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Bestimmung, Δ_m, Δ_w den mittleren, resp. wahrscheinlichen Fehler des Resultates, so ist:

$$F_m = \pm \sqrt{\frac{S}{n-1}}, \quad F_w = 0,6745 F_m,$$

$$\Delta_m = \pm \sqrt{\frac{S}{n(n-1)}}, \quad \Delta_w = 0,6745 \Delta_m.$$

In der nachstehenden Tabelle sind die Werthe von α_{18} , δ und δ^2 zusammengestellt.

α_{18}	$10^6 \cdot \delta$	$10^{12} \cdot \delta^2$	α_{18}	$10^6 \cdot \delta$	$10^{12} \cdot \delta^2$
0,042 044	+ 40	1600	0,041 950	- 54	2916
2 013	+ 9	81	1 966	- 38	1444
1 958	- 46	2116	2 060	+ 56	3136
1 992	- 12	144	1 999	- 5	25
1 962	- 42	1764	2 009	+ 5	25
1 986	- 18	324	2 004	0	0
2 107	+103	10609	1 901	-103	10609
2 009	+ 5	25	2 115	+111	12321
1 967	- 37	1369	2 032	+ 28	784
2 073	+ 69	4761	1 957	- 47	2209
2 046	+ 42	324	1 037	- 67	4489

Mittel 0,042 004 0.

$S = 0,000\,000\,061\,075$.

Hieraus ergibt sich:

$$F_m = 0,000\,053\,9' = 0,13 \text{ Proc.}$$

$$F_w = 0,000\,036\,4' = 0,09 \text{ „}$$

$$\Delta_m = 0,000\,011\,5' = 0,03 \text{ „}$$

$$\Delta_w = 0,000\,007\,8' = 0,02 \text{ „}$$

Einen constanten Fehler, der aus der Beobachtungsmethode resultiren könnte, darf ich bei der mannichfaltigen Variation in der Anordnung der Versuche für ausgeschlossen erachten.

Dagegen muss eine Correction erwähnt werden, welche an dem gewonnenen Resultate noch vorzunehmen ist; dieselbe rührt von einem Fehler des Normalthermometers her, mit dem die Temperaturbestimmungen gemacht wurden. Gegen Ende meiner Versuche bestimmte ich den Nullpunkt dieses Thermometers und fand, dass derselbe um $0,2^\circ$ zu tief lag; deshalb muss das erhaltene Resultat noch durch 1,0003 dividirt werden. Da ferner der Fehler, welcher durch Vernachlässigung des dritten Gliedes der Reihenentwicklung entsteht, grösser ist, als der wahrscheinliche Fehler des Resultates, so ist derselbe ebenfalls beim Endresultat zu berücksichtigen und zu diesem Zweck dasselbe noch mit $\frac{0,99773}{0,99773} = 0,99991$ zu multipliciren.

Hiernach ergibt sich als Endresultat der Constante für die Drehung der Polarisationssebene eines unendlich langen Strahles von Natriumlicht im Schwefelkohlenstoff für die Einheit des magnetischen Feldes bei 18° C. :

$$\alpha = 0,041\,991\,3' \pm 0,000\,007\,8'.$$

Ich will noch die Uebereinstimmung dieses Werthes mit dem von Lord Rayleigh gefundenen angeben. Dieser fand als Werth der Constante bei 18° C. :

$$\alpha = 0,042\,002.$$

Beide Angaben weichen, wie man erkennt, um 0,025 Proc. von einander ab.

Bemerkungen

über die zweckmässige Construction des Apparates, wenn derselbe zu electricischen Messungen dienen soll.

Aus den Angaben der oben angeführten Tabelle wird man ersehen, dass die praktische Anwendung der beschriebenen Methode zur Messung von Stromintensitäten in absolutem Maass einen grossen Erfolg verspricht, und zwar nicht nur für grössere Stromstärken, sondern bei geeigneter Construction des Apparates auch für geringere.

Es würden sich jedoch bei der Anwendung von Schwefelkohlenstoff einige Umstände, wenn auch nicht gerade hinderlich, so doch unbequem entgegenstellen. So vor allem die Schlierenbildung und die dadurch nöthige Wasserspülung; auch würde die Wärmestrahlung bei längerem Gebrauch des Apparates doch ihre Wirkung geltend machen.

Es sei mir deshalb gestattet, hier einige Bemerkungen anzuknüpfen über die zweckmässige Construction des Apparates, zu denen ich mich veranlasst fühle durch die Erfahrungen, die ich während meiner Arbeit zu machen vielfach Gelegenheit hatte.

Ich glaube, man kann die Wasserspülung der Röhre ganz entbehren, wenn man dafür sorgt, dass die Einwirkung der Veränderung der äusseren Temperatur möglichst verlangsamt und zu gleicher Zeit gleichmässig über die ganze Röhre vertheilt wird. Ich würde vorschlagen, das metallene Beobachtungsrohr zunächst mit einer schlecht leitenden Schicht, z. B. Kohlenstaub, zu umgeben, welche ihrerseits von einem Kupferrohr umhüllt ist; letzteres könnte, wenn nöthig, noch mit einer Holzbekleidung versehen sein, auch würde sich vielleicht noch besser eine Glasbekleidung mit dazwischenliegender Luftschicht empfehlen; die aus der Rolle hervorragenden Enden könnten ja bei ungünstigen Verhältnissen ausserdem noch in Watte verpackt werden. Die Temperaturbestimmung wäre an einem Thermometer zu machen, welches in einem durch das ganze Röhrensystem hindurchgehenden engen Rohre mit Glasansatz sich befindet, und dessen Kugel unten auf der Röhre steht, die den Schwefelkohlenstoff enthält. Da von der Wärmewirkung der Rolle, zumal bei dieser Einrichtung wenig zu befürchten ist, so könnten die Rollen, die für schwächere Ströme bestimmt, also meistens von dünnem Draht gewunden sind, einfach auf Pappröhren gewickelt werden, während ich für stärkere Ströme vorschlagen würde, dieselben auf Messingröhren zu wickeln, die zur Wasserspülung eingerichtet sind. Ferner wäre es wünschenswerth, den oben erwähnten abnehmbaren Ring des Schlussdeckels, welcher dem Polarisator zugewendet ist, aus Elfenbein und Ebenholz zu verfertigen und das Fassungsrohr des Polari-

sators mit einem Zwischenstück aus demselben Stoffe zu versehen, um die Wärme, welche von der Beleuchtungslampe ausgeht, zu verhindern, durch Leitung zum Beobachtungsrohre zu gelangen. Für den Schirm der Beleuchtungslampe würde sich ebenfalls Wasserspülung empfehlen, welche ja bei stärkeren Strömen das austliessende Spülwasser der Rolle mit besorgen könnte.

Auf diese Weise, hoffe ich, wird man von den erwähnten Uebelständen der Schlierenbildung frei werden.

A n h a n g.

Ueber die Genauigkeit des Silbervoltameters. — Zum Schluss will ich einige Ergebnisse meiner Arbeit, das Silbervoltameter betreffend, hinzufügen, die mir deshalb wichtig zu sein scheinen, weil sie zeigen, inwieweit man sich auf die Angaben zweier solcher ziemlich gleichen Apparate, die in denselben Stromkreis geschaltet sind, verlassen kann, auch wenn die Stromstärken extreme Werthe haben.

Wie schon oben bemerkt, wurden bei den ersten Versuchen zwei Silbervoltameter hintereinander in denselben Stromkreis geschaltet und aus dem Mittelwerth der Angaben beider die Stromstärke berechnet. Wenn man nun auch aus der Uebereinstimmung zweier solcher Voltameter noch nicht schliessen darf, dass die Proportionalität zwischen ihren Angaben und der Stromstärke dasselbe Maass von Genauigkeit besitze, so ist doch wohl die Annahme berechtigt, dass dieser Apparat die Stromstärke mit einem hohen Grad von Genauigkeit zu bestimmen gestattet, zumal da aus meinen Versuchen hervorging, dass die beiden Voltameter bei den verschiedensten Stromstärken fast den gleichen hohen Grad von Uebereinstimmung zeigten; und wie mir scheint, sind die Angaben von einem gewissen Concentrationsgrade des Electrolyten an unabhängig von demselben. Ich arbeitete nämlich anfangs mit einer zwanzigprocentigen Lösung, und da sich dieselbe durch den Gebrauch verringerte, so goss ich später nach Belieben Wasser hinzu, sodass ich sie ungefähr auf zwölf- bis fünfzehnprocentig schätzen konnte. Auch die mit dieser Lösung erhaltenen Resultate zeigen selbst bei

einer Stromstärke von 3,7 Ampère eine Abweichung vom Mittelwerth, welche 0,004 Proc. nicht überschreitet. Leider bin ich nicht in der Lage, Genaueres hierüber anzugeben, da, wie gesagt, die Resultate, die ich jetzt mittheilen will, nur beiläufig gewonnen wurden.

In der folgenden Tabelle sind einige dieser Resultate zusammengestellt; darin bedeuten V_1 und V_2 die in dem einen, resp. anderen Voltameter niedergeschlagenen Silbermengen, V_m den Mittelwerth aus beiden, t die Zeitdauer des Versuchs, i die Stromstärke in Ampères ausgedrückt, welche die Abscheidung bewirkte, $(V_1 - V_2)/(V_1 + V_2)$ die Abweichung vom Mittelwerth. In der letzten Columnne haben die erhaltenen Drehungen für die Einheit des magnetischen Feldes in C.G.S. Platz gefunden, und zwar um zu zeigen, dass trotz der verschiedensten Stromintensitäten die niedergeschlagene Silbermenge wirklich in hohem Grade proportional der Stromstärke war.

V_1	V_2	V_m	t	i	$\frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}$	α_{18}
mg	mg	mg	sec	Amp.		
3585,910	3585,608	3585,759	1260	2,54	0,000 042	0,042 013'
651,572	651,620	651,596	1020	0,57	0,000 037	0,041 962
2310,693	2310,722	2310,707	1320	1,56	0,000 006	0,041 986
3769,537	3769,546	3769,542	2220	1,51	0,000 001	0,042 107
3195,225	3195,361	3195,293	1080	2,65	0,000 022	0,041 950
4956,963	4957,297	4957,130	1200	3,69	0,000 033	0,042 032

Um über die Zuverlässigkeit dieser Zahlen keinen Zweifel zu lassen, mögen hier noch einige Bemerkungen über die Behandlung der Silbervoltameter angefügt werden.

Die angewendeten Platintiegel wurden vor dem Gebrauch mit Salpetersäure und destillirtem Wasser ausgewaschen und dann eine Zeit lang in destillirtem Wasser gekocht, worauf sie in einem heissen Luftbade getrocknet wurden. Später machte ich die Bemerkung, dass der Silberniederschlag besonders fest haftete, wenn die Tiegel vor dem Auskochen noch mit Aether gewaschen wurden. Nach dem Kochen wurden dieselben überhaupt nicht mehr mit den Fingern berührt, sondern ich bediente mich von da ab bei allen Operationen, die ich mit denselben vorzunehmen hatte, einer

federnden Zange, vermittelt welcher ich dieselben bequem und sicher fassen konnte. Diese Zange trug an ihren Enden ein Paar halbkreisförmige Ringe aus versilbertem Messingblech, deren Radius etwas kleiner, als der des oberen Tiegelrandes war; im Ruhezustande der Zange bildeten dieselben einen geschlossenen Kreis, welcher vermittelt der Federn geöffnet werden konnte, um den Tiegel zu greifen; beim Nachlassen des Druckes legten sich die kreisförmigen Halbringe um den Tiegel, und die Zange bildete so eine bequeme Handhabe.

Nachdem der Niederschlag gebildet war, wurden die Tiegel vorsichtig ausgegossen und hierauf jeder viermal mit kochendem destillirten Wasser ausgespült. Das erste Spülwasser wurde dazu benutzt, das um die Anoden gewickelte Fliesspapier, welches noch viel Silberlösung enthielt, auszulaugen, und hieraus wurde das Silber in Form von Chlorsilber wiedergewonnen; das folgende Spülwasser wurde nach sorgfältiger Prüfung auf etwa darin vorhandene Silberkrystalle fortgegossen; das letzte wurde zur Prüfung auf Silbersalz mit Salzsäure versetzt.

Hierbei sei bemerkt, dass, wenn man die Tiegel sorgfältig vor plötzlichen Stößen oder Verbiegungen hütet, welche letztere hier durch die Form der Zange ausgeschlossen waren, ein Losreißen der Krystalle durch das Spülwasser nicht erfolgt, auch wenn man dasselbe ziemlich schnell ausgiesst. Nur wenn die Silbermenge ein gewisses Gewicht überschritten hat, welches in diesem Falle 10 bis 12 g betrug, machte sich ein solcher Uebelstand bemerkbar. Ich befreite deshalb, nachdem dieses Gewicht erreicht war, die Tiegel jedesmal von ihrem Silber, so weit es ging, durch Auskratzen mit einem stumpfen Instrument; der Rest ward mit Salpetersäure aufgelöst, welche immer wieder zu diesem Zweck gebraucht wurde, bis sie mit Silber fast gesättigt war. Hieraus wurde das Silber als salpetersaures Silberoxyd wieder gewonnen.

Bei früheren Arbeiten mit dem Silbervoltameter habe ich übrigens die Bemerkung gemacht, dass der Niederschlag um so fester haftet, je niedriger die Temperatur des Electrolyten ist; ein in Eis befindliches Voltameter zeigte einen

ganz festen, feinkörnigen Niederschlag, während ein in einen Thermostaten bei 60° C. gestelltes, welches sich mit ersterem in demselben Stromkreise befand, einen blättrigen und lockeren Niederschlag zeigte, dessen Behandlung beim Waschen die grössten Schwierigkeiten darbot. Die Uebereinstimmung beider war jedoch eine überraschende und von derselben Ordnung, wie die oben angegebenen. Bei Kupfer zeigte sich eine ähnliche Erscheinung; das abgekühlte Kupfervoltameter zeigte einen festen, gleichmässigen rosenrothen Niederschlag, während das erwärmte einen lockeren, porösen, von brauner Farbe aufwies. Die Uebereinstimmung beider war jedoch in diesem Falle nicht befriedigend.

Aus den Erfahrungen, die ich in dieser Beziehung zu machen Gelegenheit hatte, glaube ich entnehmen zu dürfen, dass auch das Kupfervoltameter selbst in wissenschaftlicher Beziehung befriedigende Resultate liefern möchte, wenn man mit reinem Kupfervitriol und reinen Anoden bei niedriger Temperatur arbeitet. Versuche, die ich mit verschiedenen Nickellösungen und Cyansilberlösungen angestellt habe, gaben zwar schöne Niederschläge, aber ganz ungenügende Resultate.

Nachdem also die Tiegel in der oben beschriebenen Weise gewaschen waren, wurden dieselben in einem heissen Luftbade getrocknet, hierauf einige Zeit an der Luft stehen gelassen, bis man überzeugt sein konnte, dass sie die Temperatur der Umgebung angenommen hatten; dann wurden sie in den Wagekasten gesetzt, in welchem ihre Wägung vorgenommen werden sollte, und hierin vor der Wägung noch einige Zeit sich selbst überlassen, um sich den dort herrschenden Verhältnissen anzupassen. Darauf wurde die Wägung vorgenommen.

Wie gesagt, sind obige Resultate des Silbervoltameters nur beiläufig gewonnen, und ich will nicht behaupten, dass dies die äusserste Genauigkeit ist, die sich erreichen lässt. Ich glaube vielmehr, dass sich dieselbe bei eingehender Beschäftigung mit diesem Gegenstande noch weiter treiben lässt. So z. B. wurden kleine Variationen des Luftdruckes und der Temperatur nicht in Rechnung gezogen, sondern

Luft von mittlerer Beschaffenheit den Correctionsrechnungen zu Grunde gelegt. Ferner wurde der Feuchtigkeitsgehalt der Luft deshalb nicht berücksichtigt, weil sich in dem Wagekasten ständig ein Gefäss mit Chlorcalcium befand. Bei einer Specialuntersuchung dieses Gegenstandes würde ich es jedoch vorziehen, die Luft im Wagekasten nicht zu trocknen, da erwiesen ist, dass dieselbe durch Stehen über Chlorcalcium nie ganz trocken wird, und da ferner beim noch so vorsichtigen Oeffnen des Kastens doch Luft von anderer Beschaffenheit eindringt, sodass man also über den Feuchtigkeitsgehalt derselben vollständig in Zweifel ist. Es würde sich also empfehlen, wie ich glaube, durch ein neben der Wage aufgestelltes Psychrometer den Feuchtigkeitsgehalt der Luft zu controliren, zumal wenn man es mit einer so grossen Volumendifferenz, wie sie zwischen Platin und Quarz besteht, zu thun hat.

Alle diese Vorsichtsmaassregeln wurden bei den beschriebenen Versuchen zur Ermittlung obiger Constante nicht gebraucht, da die übrigen Beobachtungsfehler diejenigen, welche hierdurch entstehen konnten, bei weitem überschritten.

Ich habe diese Bemerkungen angefügt, weil meines Wissens über diesen Gegenstand bis zum Schluss meiner Arbeit noch nichts veröffentlicht war. In der Zwischenzeit ist eine Abhandlung von Lord Rayleigh erschienen¹⁾, welche meine Wahrnehmungen grossentheils bestätigt.

Aus allen diesen Resultaten geht hervor, dass eine noch viel genauere Bestimmung des electrochemischen Aequivalents des Silbers, als die bis jetzt gemachten, möglich ist, wenn es gelingt, aus den dazu nöthigen magnetischen Messungen das veränderliche Element des Erdmagnetismus zu eliminiren, vorausgesetzt natürlich, dass diese Messungen die nöthige Schärfe besitzen. Doch die mit dem Silbervoltameter erreichbare Genauigkeit könnte es wünschenswerth erscheinen lassen, dass bei der Bestimmung der Stromeinheit diese Grösse zu Grunde gelegt worden wäre.

1) Lord Rayleigh, Phil. Trans. 2. 1884.